गणित

मिडिल स्कूलों के लिये

पुस्तक III भाग I

कक्षा VIII के लिये पाठ्यपुस्तक

आई० बी० एस० पासी एल० आर० वरमानी

सम्पादक

एस० डी० चोपड़ा०

सहायक सम्पादक

आर० एस० कोठारी

आत्मा राम साहू

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

National Council of Educational Research and Training

प्रथम संस्करण
श्रावण 1901
अगस्त 1979

पुनर्मुद्रण
मार्च 1980
चैत्र 1902

फरवरी 1981
माघ 1902

मार्च 1983
चैत्र 1905

P.D. 13T-SD

मूल्य : रु० 3.55 पैसे

प्रकाशन विभाग में श्री विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा स्वर्ण प्रिंटिंग प्रेस नारायणा इंडस्ट्रियल एरिया फेज II, नई दिल्ली 110028 में मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तकमाला के अंतर्गत पुस्तक III का भाग I है। हमे जो समालोचनाएं प्राप्त हुई है उनसे प्रमाणित होता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 1977 और 1978 मे निर्मित पुस्तकों I और II का उनके प्रयो करने वालों ने बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया है। इस पुस्तक का तत्व-ज्ञान, ढग और शैली भी वही है जैसो पुस्तकों I और II में अपनाई गई थी।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के प्रो० आई० बी० एस० पासी और डा० एल० आर० वरमानी द्वारा तैयार किया गया। तदुपरान्त राष्ट्रीय शिक्षा सस्थान कैम्पस में आयोजित एक कार्यशिविर में अध्यापकों एवं विषय विशेषज्ञों द्वारा इस प्रारूप का समीक्षात्मक विवेचन किया गया। अंतिम सपादन प्रो० एस० डी० चोपड़ा, अवकाश प्राप्त वरिष्ठ प्रोफेसर एंव अध्यक्ष, गणित विभाग, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, द्वारा किया गया। इस कार्य में उन्हें परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री आर० एस० कोठारी तथा डा० आत्मा राम साहू की बहुमूल्य सहायता प्राप्त हुई। डा० एस० के० सिंह गौतम का उल्लेख करना भी आवश्यक है जिन्होंने संपादक दल की अनेक प्रकार से सहायता की। उत्तर भी उन्होने ही प्रदान किए। हिन्दी संस्करण का विषय- सपादन श्री महेन्द्र शकर ने किया। विज्ञान एव गणित शिक्षा विभाग के डा० आर० पी० गुप्ता का विशेष रूप से उल्लेख करना आवश्यक है जिन्होंने इस पुस्तक के निर्मित होने के सम्पूर्ण काल में बहुमूल्य योगदान दिया। इस पुस्तक को प्रस्तुत रूप मे लाने मे उनके बहुमूल्य सुझावों ने एक महत्व-पूर्ण भूमिका अदा की। इस पुस्तक को एक अल्प समय में ही तैयार करने में, मैं इनमें से प्रत्येक का उनके समर्पण और परिश्रम के लिए आभारी हूँ।

निस्संदेह, किसी भी पुस्तक की उपयोगिता का अंतिम निर्णायक तो उसके प्रयोग करने वाले अर्थात विद्यार्थियों और शिक्षकों का समुदाय है। परिषद् उनके विचारों का कृतज्ञतापूर्वक स्वागत करेगी ताकि पुस्तक के अगले संस्करण मे संभवतया और अधिक सुधार किया जा सके।

शिव कुमार मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
मई 1979

प्रस्तावना

"मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक III के भाग I को कक्षा VIII के विद्यार्थियों एंव अध्यापकों के सम्मुख प्रस्तुत करते हुए मुझे अति प्रसन्नता हो रही है। कुछ समय बाद जब इस पुस्तक का भाग II प्रकाशित हो जाएगा, तो मिडिल स्कूलों के लिए गणित की पुस्तकों की यह पुस्तकमाला पूर्ण हो जाएगी। कक्षाओं VI और VII के लिए क्रमश: पुस्तकों I और II को प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा ने बहुत ही योग्यतापूर्वक संपादित किया था। इन पुस्तकों के प्रयोग करने वालों से प्राप्त समालोचनाओं के अनुसार इन पुस्तकों का बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया गया है। इस वर्ष जनवरी के प्रारम्भ में जब प्रो० अरोरा यूनेस्को के एक पद पर बहरेन चले गए तो पुस्तक III के भाग I के संपादन का कार्यभार मुझे सौंप दिया गया। पुस्तकों की इस पुस्तकमाला में प्रारम्भ से मेरे सबद्ध होने के कारण यह आशा की गई कि मैं प्रो० अरोरा द्वारा निर्धारित शैली और स्तर को जारी रखने में समर्थ रहूँगा। मुझे मेरे इस कार्य में विज्ञान एव गणित शिक्षा विभाग एन० सी० ई० आर० टी० के श्री आर० एस० कोठारी एवं डा० ए० आर० साहू ने सहायता प्रदान की। हम अपने उद्देश्य में कितने सफल हुए हैं इसका फैसला केवल प्रयोगकर्ता ही कर सकते हैं।

इस पाँडुलिपि का प्रथम प्रारूप गणित विभाग, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के प्रोफेसर डा० आई० बी० एस० पासी, और रीडर डा० एल० आर० वरमानी द्वारा तैयार किया गया। जब यह प्रारूप लिखा जा रहा था तो मुझे डा० पासी के साथ इस प्रारूप के कुछ भागों पर विचार विमर्श करने के कई बार अवसर प्राप्त हुए। फिर इस प्रारूप को जनवरी 9 से 12, 1979 में एन० सी० ई० आर० टी० कैम्पस में इसी उद्देश्य से आयोजित एक कार्य-शिविर में व्यावसायिक अध्यापकों और विशेषज्ञों को दिखाया गया। संपादकों ने भी कार्य-शिविर में भाग लिया और वे उसमें भाग लेने वाले व्यक्तियों के साथ विचार विमर्श से लाभान्वित हुए। संपादकों ने जहाँ तक सम्भव हो सका है उनके सुझावों को कार्यान्वित करने का प्रयत्न किया है। मुझे विश्वास है कि इन सुझावों से पुस्तक में बहुत अधिक सुधार हुआ है।

प्रस्तुत खंड में सात एकक सम्मिलित हैं: I वास्तविक संख्याएँ, II घातांक और करणी;

III बीजीय व्यंजक, IV विशेष गुणनफल और गुणनखंड, V रैखिक समीकरण और असमीकरण, VI सारणियों का उपयोग, और VII समुच्चय । एककों I और VII के बारे में बताना विशेष महत्व रखता है । एकक I में अपरिमेय संख्याओं को असांत अनावर्ती दशमलवों के रूप में प्रविष्ट किया गया है । यह आशा की जाती है कि तेरह वर्ष के बच्चों को इस संकल्पना को समझाने के लिए पर्याप्त स्पष्टीकरण दे दिया गया है । इस संकल्पना को ठीक प्रकार से समझने के लिए सीमा प्रक्रिया, चाहे वह छिपे हुए रूप में ही हो, की कुछ उद्भावना की आवश्यकता है । एकक VII में समुच्चय की धारणा को प्रविष्ट किया गया है । गणित और उसके अनुप्रयोगों में अनेक संकल्पनाओं को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने के लिए समुच्चय भाषा अब आधारभूत है । अतः इस संकल्पना को बहुत से उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है ।

पुस्तक III के भाग II में ज्यामिति, व्यावसायिक गणित और सांख्यिकी विषयों को लिया जाएगा । इन विषयों को स्कूल वर्ष के अंतिम अर्धभाग में पढ़ाये जाने की प्रत्याशा है ।

इस पुस्तक की मुख्य विशेषताएँ वही हैं जो पुस्तक I और II की थी । परन्तु इन पुस्तकों मे जो व्यापक उद्देश्य दृष्टिगत रखा गया था उसके बारे में कुछ कहना उचित ही रहेगा । सन् 1950 और 1960 के मध्य, पश्चिमी देशों में स्कूलों के लिए गणित के पाठ्यक्रम में क्रांतिकारी परिवर्तन हुए और बहुत से देशों ने तथाकथित 'आधुनिक गणित' को अपनाया । ग्रीष्मकालीन संस्थानों (शिविरों) के एक विस्तृत कार्यक्रम द्वारा सन् 1960 और 1970 के मध्य भारत में अध्यापकों और प्रशासकों को इन परिवर्तनों से अवगत कराया गया । इस कार्यक्रम के प्रभाव के अंतर्गत ही स्कूल स्तर के गणित के पाठ्यक्रम और पुस्तकों को राष्ट्रीय स्तर पर और कई राज्यों में पुनः लिखा गया । आधुनिक गणित का तात्पर्य कोइ नया गणित नहीं था । इसका तात्पर्य अंतर्ज्ञानात्मक के स्थान पर अभिगृहीती विधि, गणितीय सामग्री और गणितीय प्रवीणता के विकास के स्थान पर विभिन्न संक्रियाओं की गणितीय संरचना तथा और अधिक परिशुद्ध नई शब्दावली के सीखने पर जोर देना था । परन्तु नये गणित के पाठ्यक्रमों का अनुभव कुछ अच्छा सिद्ध नहीं हुआ । इन पाठ्यक्रमों से अध्यापकों, विद्यार्थियों एंव अभिभावकों के एक बहुत बड़े बहुमत के लिए कठिनाइयाँ उत्पन्न हो गई । स्कूलों में गणित का अध्ययन अभिगृहीती की भाषा तथा नई शब्दावली तक ही रह गया तथा गणितीय प्रवीणता के अध्ययन की हानि हुई । इन सब के कारण गणित के स्कूली पाठ्यक्रम में पिछले कुछ वर्षों में एक अन्य विस्तृत संशोधन करना पड़ा और पाठ्यपुस्तकों की वर्तमान शृंखला इसी संशोधन का एक परिणाम है ।

पाठ्यपुस्तकों की वर्तमान शृंखला तथाकथित आधुनिक गणित और परम्परागत गणित के मध्य एक स्वस्थ संतुलन रखती है । अभिगृहीती की भाषा तथा नई शब्दावली के

प्रयोग पर दिए गए अनावश्यक बल का त्याग किया गया है। पाठक को इनसे अवगत करा दिया गया है और वहीं उनको छोड़ दिया गया है। विषय सामग्री को लगभग अंतर्शनात्मक रूप से स्पष्ट किया गया है। साथ ही, यह भी ध्यान रखा गया है कि जो गणित हम बच्चे को पढ़ाते हैं वह सरलता से उसके समझने योग्य हो तथा जहाँ तक संभव हो उसके वातावरण से सम्बन्धित हो। इसे हमारे विकास के उद्देश्यों को दृष्टिगत रखते हुए हमारे समाज की आवश्यकताओं के अनुकूल भी होना चाहिए।

पुस्तकों I और II की प्रस्तावनाओं में विद्यार्थियों को गणित सीखने पर कुछ सलाह दी गई है। यह सुझाव है कि विद्यार्थी उस सलाह को पुनः पढ़ें।

प्रस्तुत पुस्तक में ध्यानपूर्वक चुने हुए तथा स्पष्टरूप से हल किए हुए लगभग सौ उदाहरण हैं। बच्चे को संकल्पनाओं और सीखी गई विधियों के अनुप्रयोग में पर्याप्त अभ्यास देने के लिए चार सौ से अधिक प्रश्न दिए गए हैं। विविध प्रश्नावलियों के समुच्चय के अतिरिक्त इन प्रश्नों को कठिनता के क्रम में रखा गया है। पुस्तक में कठिन अनुच्छेदों तथा कठिन प्रश्नों को तारांकित कर दिया गया है।

संपादक एक बहुत बड़ी संख्या में अतिरिक्त प्रश्नों को प्रदान करने तथा सभी प्रश्नों के उत्तर निकालने में सहायता करने के लिए डा० एस० के० सिंह गौतम, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, एन० सी० ई० आर० टी० के आभारी हैं।

पुस्तकों की वर्तमान शृंखला से मेरे संबद्ध रहने के पूरे काल तक विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग की गणित शाखा के सदस्यों द्वारा प्रदान सतत सौजन्य तथा सहायता के लिए मैं उनका बहुत आभारी हूँ। मैं सहायक संपादकों का आभारी हूँ जिनके सतत कठिन परिश्रम के बिना संपादन कार्य को इतने अल्प समय में ही पूर्ण करना असंभव हो जाता। मैं डा० आर० पी० गुप्ता, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, एन० सी० ई० आर० टी० का विशेष रूप से आभारी हूँ जिन्होंने न केवल सभी आवश्यक प्रशासनिक सहायता प्रदान की अपितु कार्य के विभिन्न स्तरों पर पाँडुलिपि को पढ़ा और बहुमूल्य सुझाव दिए।

एस० डी० चोपड़ा
अवकाश प्राप्त वरिष्ठ प्रोफेसर एवं अध्यक्ष
गणित विभाग
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय
कुरुक्षेत्र

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने इस पाठ्यपुस्तक के प्रारूप का समीक्षात्मक विवेचन जनवरी 1979 में राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान कैम्पस में इसी उद्देश्य हेतु आयोजित एक कार्य शिविर में किया :

1. प्रो० एस० डी० चोपड़ा
   अवकाश प्राप्त (वरिष्ठ) प्रोफेसर एवं
   अध्यक्ष गणित विभाग,
   कुरूक्षेत्र विश्वविद्यालय,
   कुरूक्षेत्र
2. श्री प्रयाग दत्त चतुर्वेदी
   एस० पी० डी० बी० कॉलेज
   फरह, मथुरा (उ० प्र०)
3. श्री एम० एस० दहिया
   राजकीय उच्चतर माध्यमिक
   बाल विद्यालय, रूप नगर, दिल्ली
4. डॉ० एस० सी० दास
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
5. डॉ० बी० देवकीनंदन
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
6. श्री जी० डी० ढल
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
7. डॉ० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
8. डा० आर० पी० गुप्ता
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
9. डॉ० ए० के० गुप्ता
   रामजस कालेज
   दिल्ली-7
10. श्री एम० सी० गुप्ता
    डी० ए० वी० उच्चतर माध्यमिक
    विद्यालय, चित्रगुप्त रोड,
    नई दिल्ली
11. श्री ईश्वर चन्द्र
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
    प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
12. श्री एस० आर० जयपाल
    केन्द्रीय विद्यालय,
    (आर० के० पुरम),
    नई दिल्ली

13, श्री जे० पी० कंसल
एयर फोर्स सैन्ट्रल स्कूल,
सुबरोतो पार्क,
नई दिल्ली

14. डॉ० (श्रीमती) अरुणा कपूर
जामिया मिलिया इस्लामिया,
नई दिल्ली

15. श्री आर० एस० कोठारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

16. डॉ० के० सी० मदान
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

17. श्री महेन्द्र शंकर
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

18. श्रीमती आशा प्रधान
राजकीय उच्चतर माध्यमिक
बालिका विद्यालय, महरौली
नई दिल्ली

19. डॉ० राम अवतार
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

20. डॉ० ए० आर० साहू
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

21. श्रीमती राज सेठ
रामजस उच्चतर माध्यमिक
बालिका विद्यालय, दरियागंज, दिल्ली

22. श्री एस० के० शर्मा
आलोक भारती उच्चतर माध्यमिक
विद्यालय, खुराजी,
दिल्ली-51

23. श्री बलबीर सिंह
राजपूताना राइफल्स हीरोज मैमोरियल
उच्चतर माध्यमिक विद्यालय,
दिल्ली कैंट, नई दिल्ली

24. श्री सरदार सिंह
केन्द्रीय विद्यालय
गुड़गाँव, हरियाणा

संकेत-सूची

$+$	: योग
$-$	: व्यवकलन
$\times$	: गुणन
$\div$	: विभाजन
$=$	: के समान है/के बराबर है
$<$	: से छोटा है
$>$	: से बड़ा है
$\leqslant$	: से छोटा है या के बराबर है
$\geqslant$	: से बड़ा है या के बराबर है
$\sqrt{}$	: का वर्गमूल
$\sqrt[n]{}$	: का nवाँ मूल
$\%$	: प्रतिशत
$\in$	: का अंग है
$\notin$	: का अंग नहीं है
$\vert$	: ताकि
ϕ	: रिक्त समुच्चय
$\subset$	: का एक उपसमुच्चय है
$\supset$	: का एक अधि समुच्चय है
$\not\subset$	: का उपसमुच्चय नहीं है
$\cup$	: सम्मिलन
$\cap$	: सर्वनिष्ठ

विषय-सूची

एकक I

वास्तविक संख्याएँ

आप धनपूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं से पहले से ही परिचित हैं। आप जानते हैं कि इनको किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। इस एकक में हम अपने संख्या निकाय को और आगे विस्तृत करने की आवश्यकता पर प्रकाश डालेंगे।

1.1 पुनरावलोकन

आपको कक्षा VII से परिमेय संख्याओं और उन पर संक्रियाओं पर दिए एककों का पुनरावलोकन करना चाहिए। विशेष रूप से, आपको निम्न संकल्पनाओं और गुणों का पुनरावलोकन करना चाहिए :

परिमेय संख्याएँ और उनका संख्या रेखा पर निरूपण।

परिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन।

परिमेय संख्याओं का गुणन एवं विभाजन।

परिमेय संख्याओं का वितरण गुण।

किन्हीं दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सदैव एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

एक परिमेय संख्या या तो एक सांत दशमलव (terminating decimal) होता है या एक असांत आवर्ती दशमलव (non-terminating repeating decimal)।

हम आपके लिए नीचे एक पुनरावलोकन प्रश्नावली दे रहे हैं ताकि आप उपर्युक्त संकल्पनाओं का पुनरावलोकन कर सकें और जहाँ कहीं सम्भव हो इनका अनुप्रयोग कर सकें।

प्रश्नावली 1.1

1. 3 पर समाप्त होने वाली 6 अंकों की छोटी से छोटी संख्या लिखिए।
2. 2376 में 3 के स्थानीय मान (place-value) को उसके अंकित मान (face-value) से भाग दीजिए।
3. एक मेंढक, जो कि 8 मीटर गहरे एक कुएँ में गिर गया है, उसमें से कूदकर बाहर निकलने का प्रयत्न करता है। प्रत्येक बार मेंढक 70 सें० मी० ऊपर की ओर कूदता है और 20 सें० मी० नीचे फिसल जाता है। एक कूद का शुद्ध परिणाम क्या है? कुएँ से बाहर निकलने के लिए मेंढक को कितनी बार कूदना पड़ेगा?
4. $\sqrt{324}$, $\sqrt{2500}$ और $\sqrt{361}$ के मान दीजिए।
5. प्रथम 10 अभाज्य संख्याएँ (prime numbers) लिखिए।
6. एक संख्या रेखा पर निम्न परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए बिंदु अंकित कीजिए :

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{-8}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{9}$$

7. निम्न परिमेय संख्याओं को उनके निम्नतम रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{25}{15}, \frac{36}{39}, \frac{98}{35}$$

8. निम्न को परिकलित कीजिए :

$$\frac{11}{12}+\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)$$

9. निम्न परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :

$$\frac{7}{9}, \frac{-3}{5}, \frac{11}{15}, \frac{8}{11}$$

10. निम्न परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए :

$$\frac{12}{7}, \frac{-10}{6}, \frac{11}{-12}$$

11. दशमलव 0·625 को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए और अपने उत्तर को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए ।

12. असांत आवर्ती दशमलवों के पाँच उदाहरण दीजिए।

13. सरल कीजिए :

$$\left\{\left(\frac{6}{8}+\frac{9}{11}\right)-0.35\right\}\div\frac{3}{5}$$

14. 0.1 और 0.2 के बीच तीन परिमेय-संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

15. निम्न में से कौन-से पूर्णांक विषम हैं ?

158, —1715, 26170, 987003

16. निम्न में से कौन-से पूर्णांक सम हैं ?

201, 202, 203, 204, 205

17. यदि n एक सम पूर्णांक है तो n का परिवर्ती (successor) विषम है या सम ?

18. यदि n एक विषम पूर्णांक है तो n का परिवर्ती विषम है या सम ?

19. निम्न पूर्णांकों का वर्ग करके जाँच कीजिए कि उनके वर्ग सम हैं :

10, —2402, 236, —576

20. निम्न पूर्णांकों का वर्ग करके जाँच कीजिए कि एक विषम पूर्णांक का वर्ग विषम होता है :

—21, 23, 753, —801

21. निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ?

(i) दो सम पूर्णांकों के वर्गों का योग सम होता है।

(ii) दो विषम पूर्णांकों के वर्गों का योग विषम होता है।

1.2 भूमिका

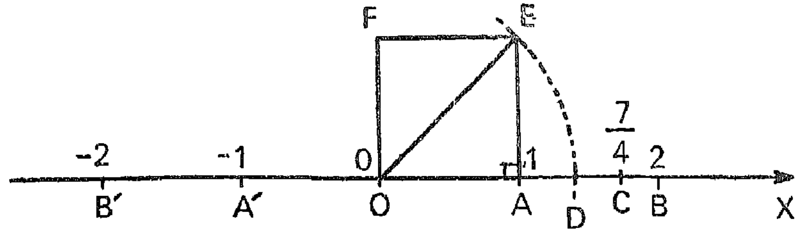
हम पिछली कक्षाओं में धनपूर्णांकों, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं। धनपूर्णांक दैनिक जीवन में तीन मुख्य कार्यों में प्रयोग किए जा सकते हैं। पहला **गिनने** में, जबकि हम कहते हैं कि एक कक्षा में 30 लड़के है अथवा एक गाँव की जनसंख्या 673 है, इत्यादि। दूसरा **परिमाणों को मापने (measurement of magnitudes)** में, जबकि हम 1 किलोग्राम चीनी अथवा 2 लीटर दूध अथवा 30 क्विटल गेंहूँ, इत्यादि की बात करते हैं। तीसरा **लेबिल करने (labelling)** में, जबकि हम एक कक्षा के विद्यार्थियों को रोल नम्बर निर्दिष्ट करते हैं अथवा एक परीक्षा में बैठने वाले प्रत्याशियों को रोल नम्बर निर्दिष्ट करते हैं, इत्यादि।

धनपूर्णांकों में व्यवकलन की संक्रिया सदैव करने में समर्थ होने के लिए हमें ऋणात्मक पूर्णांकों को प्रविष्ट करने की आवश्यकता पड़ी।

परिमेय संख्याओं को प्रविष्ट करने की आवश्यकता तब पड़ती है जब हम वस्तुओं की एक निश्चित संख्या को दिए हुए भागों में समान रूप से विभाजित करना चाहते हैं, उदाहरणार्थ, जब हम 3 संतरों को समान रूप से 5 लड़कों में विभाजित करना चाहते हैं। दैनिक जीवन में परिमेय संख्याओं की आवश्यकता अनेक अन्य समस्याओं में भी पड़ती है, उदाहरणार्थ, कपड़ा अथवा दो बिंदुओं के बीच की दूरी अथवा कमरे की लम्बाई मापने में जो कि हमारे मापन के मात्रक के पूर्ण गुणज (whole multiple) नहीं होते। अब हम देखेंगे कि इस कार्य के लिए परिमेय संख्याएँ पर्याप्त नहीं हैं।

कक्षा VII में हमने सीखा था कि परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर बिंदुओं द्वारा किस प्रकार निरूपित किया जाता है। आकृति 1.1 में संख्या रेखा OAX तथा उस पर कुछ परिमेय संख्याएँ अंकित की हुई दर्शाई गई हैं।

आपको याद होगा कि जब हम यह कहते हैं कि बिंदु A, B, C, परिमेय संख्याएँ $1, 2, \frac{7}{4}$, निरूपित करते हैं तो उससे हमारा तात्पर्य होता है कि लम्बाइयाँ OA, OB, OC, क्रमशः $1, 2, \frac{7}{4}$ मात्रक हैं। दूसरे शब्दों में, एक



आकृति 1.1 : संख्या रेखा

रेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए हम उस रेखा पर ऐसे रेखाखंडों की रचना करते हैं जिनकी एक मात्रक लम्बाई (unit length) के पदों में मापें वे परिमेय संख्याएँ हैं । अब हम एक प्रश्न पूछते हैं । क्या रेखा पर स्थित प्रत्येक रेखाखंड की माप को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ? इस प्रश्न का उत्तर है, नहीं । आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें ।

आइए OA को एक भुजा लेकर उस पर एक वर्ग OAEF की रचना करें । (देखिए आकृति 1.1) O और E को मिलाइए । तब OA=AE=1 मात्रक है । विकर्ण OE की लम्बाई क्या है ? हम देखते हैं कि OAE एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण A पर है । पाइथागोरस प्रमेय* से,

$$OE^2=OA^2+AE^2=1^2+1^2=2$$

इस प्रकार, OE वह लम्बाई है जिसका वर्ग 2 के बराबर है । दूसरे शब्दों में, OE की लम्बाई 2 का वर्गमूल है । आइए मान लेते हैं कि 2 के वर्गमूल को हम संकेत $\sqrt{2}$ से व्यक्त करेंगे ।

O को केन्द्र मानकर और OE त्रिज्या लेकर OX को D पर काटता हुआ एक चाप खींचिए । तब $OD=OE=\sqrt{2}$ है । तब संख्या रेखा पर OD एक रेखाखंड है जिसकी लम्बाई $\sqrt{2}$ है । अगले अनुच्छेद में हम पढ़ेंगे कि ऐसी

*पाइथागोरस प्रमेय : किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है ।

आप इस महत्वपूर्ण प्रमेय को बाद में पढ़ेंगे ।

कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 के समान है, अर्थात् $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। अतः संख्या रेखा पर हमें ऐसे रेखाखंड भी प्राप्त होते हैं जिनकी लम्बाइयों को परिमेय संख्याओं में व्यक्त नहीं किया जा सकता। यदि हम संख्या रेखा पर स्थित सभी रेखाखंडों की लम्बाइयों को संख्याओं के रूप में व्यक्त करना चाहें तो इस कार्य के लिए केवल परिमेय संख्याएँ ही पर्याप्त नही है और हमें अपने संख्या निकाय को विस्तृत करने की आवश्यकता है।

1.3 तथ्य कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है

आइए ध्यानपूर्वक निम्न प्रश्न पर विचार करें : क्या हमें एक ऐसी परिमेय संख्या x प्राप्त है जिसका वर्ग 2 के समान है ? हम जानते हैं कि $1^2=1$ जो कि 2 से छोटा है। अतः x, 1 से बड़ा होना चाहिए। साथ ही $2^2=4$, जो कि 2 से बड़ा है। अतः x, 2 से छोटा होना चाहिए। क्या 1 और 2 के बीच हमें कुछ परिमेय संख्याएँ ज्ञात हैं ? निस्संदेह, हमें ज्ञात हैं। वास्तव में, 1 और 2 के बीच हम जितनी परिमेय संख्याएँ चाहें लिख सकते हैं। उदाहरणार्थ,

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, में से सभी 1 और 2 के बीच स्थित हैं। आइए इनके वर्ग लिखें।

$$\begin{aligned}
(1.1)^2 &= 1.21\\
(1.2)^2 &= 1.44\\
(1.3)^2 &= 1.69\\
\mathbf{(1.4)^2} &= \mathbf{1.96}\\
\mathbf{(1.5)^2} &= \mathbf{2.25}\\
(1.6)^2 &= 2.56\\
(1.7)^2 &= 2.89\\
(1.8)^2 &= 3.24\\
(1.9)^2 &= 3.61
\end{aligned}$$

हम देखते हैं कि उपर्युक्त संख्याओं में से किसी का भी वर्ग 2 के समान नहीं है। इसलिए x उपर्युक्त संख्याओं में से किसी के भी समान नहीं है। फिर

भी हम देखते हैं कि $(1.4)^2 = 1.96$ जो कि 2 से छोटा है तथा $(1.5)^2 = 2.25$ जो कि 2 से बड़ा है। अतः x, 1.4 से बड़ा और 1.5 से छोटा होना चाहिए। क्या हमें 1.4 और 1.5 के बीच कुछ परिमेय संख्याएँ ज्ञात हैं? निस्संदेह, सभी परिमेय संख्याएँ 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48 1.49 संख्या 1.4 से बड़ी हैं परन्तु 1.5 से छोटी हैं। यदि हम इन संख्याओं में से प्रत्येक का वर्ग निकालें तो हमें पुनः यह ज्ञात होगा कि इन वर्गों में से कोई भी 2 के समान नहीं हैं। परन्तु हम यह जाँच कर सकते हैं कि x, 1.41 से बड़ा है तथा 1.42 से छोटा है।

यदि हम इस प्रक्रिया को एक चरण और आगे जारी रखें तो हमें ज्ञात होगा कि x, 1.414 से बड़ा है तथा 1.415 से छोटा है। हम इस प्रक्रिया को अनिश्चित काल तक जारी रख सकते हैं। परन्तु हम निश्चयपूर्वक यह कैसे कह सकते हैं कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 के समान है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें पूर्णांकों के एक गुण की आवश्यकता है जिस पर अब हम विचार करेंगे।

यदि हमें यह ज्ञात हो कि एक पूर्णांक a विषम है या सम, तो क्या हम उसके वर्ग के बारे में कुछ कह सकते हैं? आइए कुछ उदाहरण लें।

$6 = 2 \times 3$ एक सम पूर्णांक है। इसका वर्ग $6 \times 6 = 36 = 2 \times 18$ भी एक समपूर्णांक है।

पुनः, $24 = 2 \times 12$ एक सम पूर्णांक है। इसका वर्ग $24 \times 24 = 576 = 2 \times 288$ भी एक सम पूर्णांक है।

वास्तव में एक सम पूर्णांक का वर्ग सदैव सम ही होता है। क्यों कि यदि a एक सम पूर्णांक है, तो किसी पूर्णांक b के लिए $a = 2 \times b$ होगा। वर्ग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$
\begin{aligned}
a^2 &= a \times a \\
&= 2 \times b \times 2 \times b \\
&= 2 \times (2 \times b^2)
\end{aligned}
$$

जो 2 का एक गुणज है और इसलिए सम है। इस प्रकार, एक समपूर्णांक का वर्ग सम होता है।

अब आइए विषम पूर्णांकों के वर्गों की जाँच करें। 3 एक विषम पूर्णांक है। इसका वर्ग $3^2 = 9 = 2 \times 4 + 1$ भी विषम है। एक अन्य उदाहरण लीजिए।

$-17 = 2 \times (-9) + 1$ एक विषम पूर्णांक है। -17 का वर्ग,

$$(-17)^2 = (-17) \times (-17)$$
$$= 289$$
$$= 2 \times 144 + 1$$

भी एक विषम पूर्णांक है। वास्तव में, एक विषम पूर्णांक का वर्ग सदैव विषम ही होता है। क्योंकि यदि a एक विषम पूर्णांक है, तो किसी पूर्णांक b के लिए $a = 2 \times b + 1$ होगा।

वर्ग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a^2 = a \times a$$
$$= (2 \times b + 1) \times (2 \times b + 1)$$
$$= 2 \times (2 \times b^2 + 2 \times b) + 1$$

जो एक विषम पूर्णांक है। इस प्रकार, एक विषम पूर्णांक का वर्ग विषम होता है। अतः हम देखते हैं कि

सम पूर्णांक का वर्ग सम होता है तथा विषम पूर्णांक का वर्ग विषम होता है।

पूर्णांकों के वर्गों के उपर्युक्त गुण को सीखने के बाद अब हम सिद्ध करेंगे कि

$\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

***उपपत्ति :** यदि संभव है, तो मान लीजिए कि $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ एक परिमेय संख्या है जो $\sqrt{2}$ के समान है। हम मान लेते हैं कि p और q में कोई गुणनखंड उभयनिष्ठ नहीं है। क्योंकि यदि कोई है तो उसे काटा जा सकता है। तब,

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

अर्थात्, $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों को q^2 से गुणा करने पर,

$$p^2 = 2 \times q^2$$

जो यह दर्शाता है कि p^2 एक सम पूर्णांक है। परन्तु तब p स्वयं भी एक सम पूर्णांक होना चाहिए। क्योंकि यदि p विषम होता तो उसका वर्ग भी विषम होता। अतः किसी पूर्णांक r के लिए $p = 2 \times r$ होगा। p का यह मान $p^2 = 2 \times q^2$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(2 \times r)^2 = 2 \times q^2$$

अब, $(2 \times r)^2 = (2 \times r) \times (2 \times r) = 4 \times r^2$

अतः, $4 \times r^2 = 2 \times q^2$

दोनों पक्षों को 2 से विभाजित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2 \times r^2 = q^2$$

जो यह दर्शाता है कि q^2 सम है। पहले की ही तरह इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि q स्वयं भी सम होना चाहिए। अतः किसी पूर्णांक s के लिए $q = 2 \times s$ होगा। इस प्रकार अन्त में हमने यह दर्शा दिया है कि p और q दोनों ही 2 से विभाज्य हैं। परन्तु हम यह मान कर चले हैं कि p और q में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। यह विरोधाभास दर्शाता है कि हमारी कल्पना असत्य है और ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 के समान है। अतः $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

उपर्युक्त चर्चा यह दर्शाती है कि परिमेय संख्या निकाय ज्यामितीय और बीजीय दोनों ही दृष्टिकोण से अपर्याप्त है। ज्यामितीय रूप से, परिमेय संख्याएँ सभी संभव लम्बाइयों को व्यक्त करने के लिए अपर्याप्त हैं, उदाहरणार्थ, 1 मात्रक की भुजा वाले वर्ग के विकर्ण की लम्बाई। बीजीय रूप से, परिमेय संख्या निकाय 2 के प्रकार की संख्याओं के वर्गमूल निकालने में अपर्याप्त है। अतः उपर्युक्त ज्यामितीय और बीजीय प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने में समर्थ होने के लिए नई संख्याओं को 'खोजने' की आवश्यकता है।

हम नई संख्याएँ प्रविष्ट करके जिन्हें **अपरिमेय संख्याएँ (irrational numbers)** कहा जाता है परिमेय संख्या निकाय को **वास्तविक संख्या निकाय (real number system)** में विस्तृत करते हैं।

1.4 अपरिमेय संख्या की संकल्पना

हम कक्षा VII में परिमेय संख्याओं के अंकगणित के बारे में पढ़ चुके हैं। विशिष्ट रूप से, हम जानते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा जाता है :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

हम कितनी भी दी हुई परिमेय संख्याओं को जोड़ सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हमें चार परिमेय संख्याएँ

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ और $\frac{1}{16}$ दी हुई हैं, तो

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

आइए निम्न स्थिति पर विचार करें जहाँ हमें अनिश्चित काल तक जोड़ते रहना पड़ता है।

मान लीजिए एक कीड़ा 1 मीटर ऊँचे एक खम्भे पर चढ़ने का प्रयत्न कर रहा है। यह भी मान लीजिए कि कीड़ा पहले घंटे में $\frac{1}{2}$ मीटर, दूसरे घंटे में $\frac{1}{4}$ मीटर, तीसरे घंटे में $\frac{1}{8}$ मीटर, चौथे घंटे में $\frac{1}{16}$ मीटर, पाँचवे घंटे में $\frac{1}{32}$ मीटर, इत्यादि चढ़ता है। प्रत्येक घंटे में कीड़ा उससे ठीक पहले घंटे में चढ़ी ऊँचाई की आधी ऊँचाई चढ़ता है। क्या कीड़ा खम्भे के शिखर तक पहुँच पाएगा? निस्संदेह, नहीं। क्योंकि वह कितने ही घंटों तक चढ़ता रहे, वह फिर भी शिखर से कुछ न कुछ दूरी पर अवश्य रहेगा। परन्तु पहले कुछ घंटों के बाद वह शिखर के काफी निकट पहुँच जाएगा। उदाहरणार्थ, चार घंटों के बाद वह $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)$ मीटर$=\frac{15}{16}$ मीटर चढ़ लेगा और शिखर से केवल $\frac{1}{16}$ मीटर दूर रह जाएगा। पाँच घंटों के बाद, वह $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$ मीटर$=\frac{31}{32}$ मीटर चढ़ लेगा और शिखर से केवल $\frac{1}{32}$ मीटर दूर रह जाएगा।

जो हम कर रहे हैं वह यह कि हम परिमेय संख्याओं

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

को अनिश्चित काल तक जोड़ रहे हैं, जहाँ प्रत्येक परिमेय संख्या अपने पूर्ववर्ती **(predecessor)** संख्या की आधी है। हम इस योग को निम्न प्रकार लिखकर व्यक्त करते हैं :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

यह अपरिमित श्रेणी **(infinite series)** का एक उदाहरण है। हम देखते हैं कि इस श्रेणी में यह गुण है कि यदि हम इसमें अधिक और और अधिक पद जोड़ें तो हमें 1 के निकट और और अधिक निकट संख्याएँ प्राप्त होती हैं। हम इसे यह कहकर व्यक्त करते हैं कि यह अपरिमित श्रेणी 1 पर अभिसरित **(converge)** होती है। वास्तव में ऐसी धारणाएँ कक्षा VII में हमारे सम्मुख आई थी।

हम पढ़ चुके हैं कि एक परिमेय संख्या को एक सांत अथवा असांत् आवर्ती दशमलव में किस प्रकार निरूपित किया जाता है। उदाहरणार्थ, हम जानते हैं कि

$\frac{1}{4} = 0.25$

तथा, $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

जब हम $\frac{1}{4}=0.25$ लिखते हैं, तो हम कह रहे हैं (स्थानीय-मान पद्धति को याद कीजिए) कि

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

परन्तु आइए विचार करें कि हमारा निम्न से क्या तात्पर्य है :

$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

अब 0.333... निम्न अपरिमित श्रेणी के लिए प्रयोग होता है :

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots$$

और जब हम $\frac{1}{3}=0.333...$ लिखते हैं, तो वास्तव में हमारा तात्पर्य यह होता है कि अपरिमित श्रेणी

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...$$

परिमेय संख्या $\frac{1}{3}$ पर अभिसरित होती है। दूसरे शब्दों में, यदि हम अपरिमित श्रेणी

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...$$

के अधिक और और अधिक पदों को जोड़ें, तो हमें $\frac{1}{3}$ के निकट और और निकट संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण या तो सांत होता है जैसा कि

$$\frac{1}{4}=0.25$$

की स्थिति में है या असांत आवर्ती होता है जैसा कि

$$\frac{1}{3}=0.333...$$

की स्थिति में है।

इसमें एक स्थिति शेष रह जाती है अर्थात् **असांत अनावर्ती दशमलवों (non-terminating non-repeating decimals)** की स्थिति।

उदाहरणार्थ, हमें अपरिमित श्रेणी

$$\frac{1}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{0}{100000}+\frac{1}{1000000}+...$$

अर्थात् दशमलव

$$0.101001...$$

प्राप्त है। यह एक असांत अनावर्ती दशमलव है। ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिस पर ये अपरिमित श्रेणी अभिसरित होती है। क्योंकि, याद कीजिए कि प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण या तो सांत होता है या असांत आवर्ती।

असांत अनावर्ती दशमलव हमारी नई संख्याएँ हैं जिन्हें अपरिमेय संख्याएँ कहते हैं।

1.5 कुछ अपरिमेय संख्याओं के दशमलव रूप

1.5.1 अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$

हम पहले ही देख चुके हैं कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 के समान है। क्या ऐसी कोई अपरिमेय संख्या है जिसका वर्ग 2 के समान है? इस प्रश्न का उत्तर है : 'हाँ'। वस्तुत:, इस संख्या के प्रथम कुछ दशमलव स्थान हम पहले ही परिकलित कर चुके हैं। हम यह दिखा चुके हैं कि 1.41 का वर्ग 2 से छोटा है जबकि 1.42 का वर्ग 2 से बड़ा है। इसी प्रकार हम जाँच कर सकते हैं कि

$$(1.414)^2 < 2 < (1.415)^2$$
$$(1.4142)^2 < 2 < (1.4143)^2$$
$$(1.41421)^2 < 2 < (1.41422)^2$$
$$(1.414213)^2 < 2 < (1.414214)^2$$
$$(1.4142135)^2 < 2 < (1.4142136)^2,$$ इत्यादि।

यदि हम इस प्रक्रिया को अनिश्चित काल तक करते रहें तो हमें निम्न संख्या प्राप्त होती है :

$$x = 1.4142135...$$

जो एक असांत अनावर्ती दशमलव है। उपर्युक्त प्रक्रिया से हम देखते हैं कि दाईं ओर प्रत्येक अंक के लगाने से संख्या का वर्ग 2 के निकट और और निकट होता जाता है। हम इस अपरिमेय संख्या को 2 का वर्गमूल कहते हैं। हम यह पहले ही मान चुके हैं कि इसे संकेत $\sqrt{2}$ से व्यक्त किया जाएगा।

1.5.2 अपरिमेय संख्याएँ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

जैसा हमने $\sqrt{2}$ की स्थिति में किया था उसी प्रकार हम दर्शा सकते हैं कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं। हम उसी प्रकार इनके असांत अनावर्ती दशमलव निरूपण प्राप्त कर सकते हैं। ये निम्न हैं :

$$\sqrt{3} = 1.7320508...$$
$$\sqrt{5} = 2.2360680...$$
$$\sqrt{7} = 2.6457513...$$

1.5.3 अपरिमेय संख्या π

किसी भी वृत्त की परिधि (circumference) का उसके व्यास से (diameter) से अनुपात एक स्थिरांक (constant) होता है और वह वृत्त की त्रिज्या

पर निर्भर नहीं करता। इस अनुपात को π से व्यक्त किया जाता है। हम π के बारे में विस्तृत रूप से इस पुस्तक के भाग II में पढ़ेंगे। इसका दशमलव निरूपण निम्न है :

3.141592...

1.6 अपरिमेय संख्याओं पर मूलभूत संक्रियाएँ

1.6.1 योग और गुणन

सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं, चाहे वे पूर्ण वर्ग हों या नहीं, के वर्गमूल निकालने के लिए हम धनात्मक अपरिमेय संख्याएँ जैसे कि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ इत्यादि प्रविष्ट कर चुके है। जो परिमेय संख्याएं पूर्ण वर्ग नहीं होती उनके अपरिमेय वर्गमूल होते हैं। हम अपरिमेय संख्याओं के अन्य उदाहरण भी देख चुके हैं। इन संख्याओं के साथ कार्य करने में समर्थ होने के लिए हम इन पर **योग** और **गुणन** की संक्रियाएँ उन्हीं नियमों के साथ प्रविष्ट कर रहे हैं जैसे कि परिमेय संख्याओं के योग और गुणन के लिए थे। उदाहरणार्थ, **योग और गुणन के क्रमविनिमेय (commutative) और साहचर्य (associative) नियम धनात्मक अपरिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य हैं।**

इस प्रकार, **यदि a, b, c, तीन धनात्मक अपरिमेय संख्याएँ हैं, तो**

$\mathbf{a+b=b+a,\ a\times b=b\times a}$ **क्रमविनिमेय नियम**

$\mathbf{(a+b)+c=a+(b+c),\ (a\times b)\times c=a\times(b\times c)}$ **साहचर्य नियम**

वितरण नियम (distributive law) भी सत्य है। अर्थात्,

$$\mathbf{(a+b)\times c=a\times c+b\times c,\ c\times(a+b)=c\times a+c\times b}$$

ध्यान दीजिए कि अपरिमेय संख्याओं के योग और गुणन के लिए हमने वैसे ही संकेत प्रयोग किए हैं जैसे परिमेय संख्याओं के लिए किए थे।

परिमेय संख्याओं की भांति हम धनात्मक अपरिमेय संख्याओं में **क्रम-सम्बन्ध (relations of order)** अर्थात् **'से बड़ा' है** और **'से छोटा है'** वाले संबंध भी प्रविष्ट कर रहे हैं और इन सम्बन्धों के लिए हम वैसे ही संकेत क्रमशः '$>$' और '$<$' प्रयोग करेंगे जैसे परिमेय संख्याओं के लिए थे।

1.6.2 व्यवकलन और ऋणात्मक अपरिमेय संख्याएँ

अब हम, अपरिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन की संक्रिया योग के प्रतिलोम (inverse) के रूप में उसी प्रकार प्रविष्ट करते हैं जिस प्रकार परिमेय संख्याओं के लिए की थी। इसमें समर्थ होने के लिए कि हम एक अपरिमेय संख्या में से दूसरी अपरिमेय संख्या सदैव घटा सकें यह आवश्यक हो जाता है कि ऋणात्मक अपरिमेय संख्याओं को प्रविष्ट किया जाए। अतः हम प्रत्येक धनात्मक अपरिमेय संख्या के लिए $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\pi$, इत्यादि के प्रकार की एक संख्या निम्न गुण के साथ प्रविष्ट करते हैं :

$$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$$
$$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$$
$$\pi+(-\pi)=0, \text{ इत्यादि ।}$$

परिमेय संख्याओं की तरह, ये संख्याएँ तदनुरूपी धनात्मक अपरिमेय संख्याओं की ऋणात्मक (negatives) कहलाती हैं तथा धनात्मक अपरिमेय संख्याएं इन संख्याओं की ऋणात्मक कहलाती हैं।

ऋणात्मक अपरिमेय संख्याओं को प्रविष्ट कर लेने के बाद व्यवकलन, योग की एक विशेष स्थिति रह जाती है। क्योंकि एक अपरिमेय संख्या, उदाहरणार्थ a, को दूसरी अपरिमेय संख्या, उदाहरणार्थ b, में से घटाने के लिए हम b में a का ऋणात्मक जोड़ सकते हैं। अर्थात्,

$$b-a=b+(-a)$$

जब व्यवकलन की संक्रिया को योग की एक विशेष स्थिति लिया जाता है तो इस पर वही नियम लागू होते हैं जो योग के लिए होते हैं।

1.6.3 विभाजन और व्युत्क्रम

व्यवकलन की तरह, हम अपरिमेय संख्याओं के लिए विभाजन की संक्रिया गुणन के प्रतिलोम के रूप में प्रविष्ट करते हैं।

परिमेय संख्याओं की ही तरह, हम एक अपरिमेय संख्या के व्युत्क्रम (reciprocal) की संकल्पना भी उस संख्या के रूप में प्रविष्ट करते हैं जिसका दी हुई संख्या के साथ गुणनफल 1 के समान है। इस प्रकार, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\pi}$ क्रमश : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{7}, \pi$ के व्युत्क्रम हैं।

हम देखते हैं कि ऊपर हमने यह मान लिया है कि परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को साथ लेकर भी हम अंकगणितीय संक्रियाएँ कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, हमें $2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{5}-1$, इत्यादि के प्रकार की संख्याएँ भी प्राप्त हो सकती हैं।

1.7 अपरिमेय संख्याओं से युक्त व्यंजकों का सरलीकरण

हम कक्षा VII में पढ़ चुके हैं कि जब हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़ते या गुणा करते हैं, एक परिमेय संख्या में से दूसरी परिमेय संख्या घटाते हैं, या एक परिमेय संख्या में अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देते हैं, तो परिणाम सदैव एक परिमेय संख्या ही प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ,

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{11}{10}, \quad \frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{9}{14}$$

$$7-\frac{6}{5}=5\frac{4}{5}, \quad \frac{3}{2}\div\frac{4}{5}=\frac{15}{8}$$

दूसरे शब्दों में, अंकगणित की मूलभूत संक्रियाओं का प्रयोग करके परिमेय संख्याओं से बने किसी भी व्यंजक को सरल किया जा सकता है तथा उसका परिणाम एक परिमेय संख्या होता है। उदाहरणार्थ,

$$\left[\left(\frac{6}{7}\times\frac{21}{23}\right)-\frac{25}{161}\right]\div\frac{202}{161}=\frac{1}{2}$$

परन्तु जब हम चारों अंकगणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करके परिमेय और अपरिमेय संख्याओं दोनों से कोई व्यंजक बनाते हैं, तो व्यापक रूप में ऐसे व्यंजकों को सरल करना और परिणाम को एक सरल परिमेय या अपरिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना संभव नहीं होता। उदाहरणार्थ, हम $\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{5}-1, \frac{\sqrt{5}}{2}$, इत्यादि जैसे सरल व्यंजकों तक को और अधिक सरल नहीं कर सकते।

परन्तु हम यह चाहेंगे कि अपरिमेय संख्याओं के भाग से युक्त व्यंजकों को, यदि संभव हो तो, इस प्रकार लिखा जाए कि उसका हर एक धनात्मक पूर्णांक हो । उदाहरणार्थ, हम

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ को } \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ को } \frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

लिखना चाहेंगे । जो विधि हम यहाँ प्रयोग कर रहे हैं वह हर का परिमेयकरण **(rationalization of denominator)** कहलाती है । हम हर के परिमेयकरण का एक अन्य उदाहरण देते हैं ।

'उदाहरण 1 : $\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ को सरल कीजिए ।

हल : कक्षा VII से हम निम्न सूत्र के बारे में जानते हैं :

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$$

इसलिए, यदि हम $3-\sqrt{5}$ को $3+\sqrt{5}$ से गुणा करें तो हमें $(3)^2-(\sqrt{5})^2 =9-5=4$ प्राप्त होगा । अतः, हम दी हुई भिन्न के अंश और हर दोनों को $3+\sqrt{5}$ से गुणा करते हैं । इससे हर एक परिमेय संख्या बन जाएगा । हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(2+\sqrt{5})\ (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\ (3+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{(3)^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{11+5\sqrt{5}}{4}=\frac{11}{4}+\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

1.8 अपरिमेय संख्याओं का सन्निकट मान निकालना

अपरिमेय संख्याओं की वर्गमूल, घनमूल, इत्यादि निकालने तथा समीकरणों को हल करने जैसी अनेक गणितीय समस्याओं के ठीक-ठीक हल प्राप्त करने में

आवश्यकता पड़ती है। परन्तु अपने दैनिक जीवन में हम इनका कभी-कभी प्रयोग करते हैं और इसी कारण हम इनसे कम परिचित हैं। सभी व्यावसायिक लेन-देन में हम केवल परिमेय संख्याओं का ही प्रयोग करते हैं। साथ ही, सभी भौतिक मापन परिमेय संख्याओं के पदों में होते हैं। अतः, जब भी विज्ञान, वाणिज्य, इत्यादि की किसी समस्या के गणितीय हल में अपरिमेय संख्याएँ संबद्ध होती हैं, हम अंतिम उत्तर को परिमेय संख्याओं के पदों में देना चाहते हैं। ऐसे उत्तर बिल्कुल ठीक (exact) नहीं हो सकते। क्योंकि कोई भी अपरिमेय संख्या एक परिमेय संख्या के समान नहीं होती। परन्तु, जैसा कि हम ऊपर कुछ स्थितियों में देख चुके हैं, हम किसी अपरिमेय संख्या के जितना निकट हम चाहें परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। यह कथन सभी अपरिमेय संख्याओं के लिए सत्य है, यद्यपि हम इसे इस स्तर पर सिद्ध नहीं कर सकते। वास्तव में जो हम करते हैं वह यह है कि हम अपरिमेय संख्याओं के स्थान पर उनके सन्निकट (approximate) मान रख देते हैं। ये सन्निकट मान अपरिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपणों से निश्चित दशमलव स्थानों तक मान ज्ञात करने से प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम दशमलव के केवल तीन स्थानों तक के मानों का प्रयोग करें तो

$$\sqrt{2}+1=1.414+1=2.414$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=1.732-1.414=0.318$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+2}=\frac{1.732+1}{1.414+2}=\frac{2.732}{3.414}=0.800$$

यह ध्यान देने योग्य बात है कि दाईं ओर दिए हुए मान बाईं ओर दिए व्यंजकों के मानों के केवल सन्निकटन (approximations) ही हैं।

अधिकांश भौतिक समस्याओं में दशमलव के केवल तीन स्थानों तक ही कार्य करना पर्याप्त रहता है। यदि अधिक स्थानों तक कार्य करने की आवश्यकता है तो हम ऐसे मान सारणियों की एक पुस्तक में से ले सकते हैं जैसा कि एकक VI में स्पष्ट किया गया है।

प्रश्नावली 1.2

*1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

2. $\sqrt{2}$ के लिए प्रयुक्त विधि का अनुसरण करते हुए $\sqrt{3}$ के दशमलव निरूपण में पहले चार अंक प्राप्त कीजिए।

3. 10 अपरिमेय संख्याएँ लिखिए।

4. निम्न में से कौन-सी संख्याएँ परिमेय हैं और कौन-सी अपरिमेय ?

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}+\sqrt{5}$ (iii) $\frac{2}{7}-\sqrt{3}$ (iv) $3-\sqrt{3}$

(v) 0.2020020002... (दो क्रमागत 2 के बीच में शून्यों की संख्या अनिश्चितकाल तक बढ़ रही है)

5. 5 दशमलव स्थानों तक $1.12057+\sqrt{5}$ को परिकलित कीजिए।

6. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के दशमलव के 2 स्थानों तक मान लेकर $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. 3 दशमलव स्थानों तक $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को परिकलित कीजिए।

8. 3 दशमलव स्थानों तक $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ को परिकलित कीजिए।

सरल कीजिए :

*9. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

*10. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

1.9 वास्तविक संख्या की संकल्पना

अब हमें दो प्रकार की संख्याएँ ज्ञात हैं। ये हैं परिमेय संख्याएँ और अपरिमेय संख्याएँ। परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण 'सांत' अथवा 'असांत

आवर्ती' होते हैं जबकि अपरिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण 'असांत अनावर्ती' होते हैं। ये दो प्रकार की संख्याएँ मिलकर **वास्तविक संख्याएँ (real numbers)** कहलाती हैं। इस प्रकार, वास्तविक संख्याएँ दो प्रकार की होती हैं, पहली परिमेय और दूसरी अपरिमेय।

1.10 वास्तविक संख्या रेखा

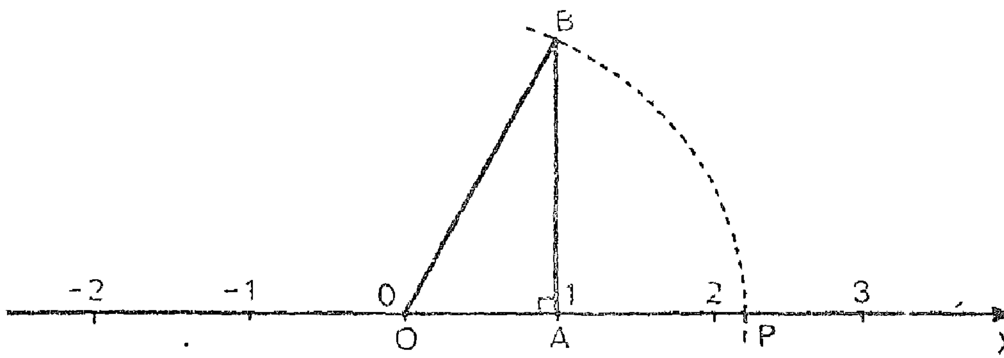
हम सीख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है। साथ ही, अनुच्छेद 1.2 में हमने देखा था कि संख्या रेखा पर सभी संभव रेखाखंडों की लम्बाइयाँ ठीक-ठीक मापने के लिए अकेली परिमेय संख्याएँ ही पर्याप्त नहीं हैं। हमें ज्ञात हुआ था कि आकृति 1.1 में रेखाखंड OD को जिसकी लम्बाई 1 मात्रक की भुजा वाले वर्ग के विकर्ण के बराबर है, एक परिमेय संख्या के पदों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। अतः संख्या रेखा पर D एक परिमेय बिंदु नहीं है। हम ऐसे जितने चाहें बिंदुओं की रचना कर सकते हैं। इस अनुच्छेद के बाद हल किए हुए उदाहरणों में ऐसे कुछ बिंदुओं की रचना की गई है। अतः, जब संख्या रेखा पर सभी परिमेय संख्याएँ बिंदुओं द्वारा निरूपित हो जाती हैं तो संख्या रेखा के सभी बिंदु समाप्त नहीं हो जाते। दूसरे शब्दों में, वहाँ बहुत से रिक्त स्थान रह जाते हैं।

परिशुद्धतः अपरिमेय संख्याएँ इन्हीं रिक्त स्थानों को भरने के लिए खोजी गई हैं। **जब संख्या रेखा पर सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ अर्थात् सभी वास्तविक संख्याएँ निरूपित कर दी जाती हैं तो वह वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहलाती है।**

आप उच्चतर अध्ययन करते समय यह सीखेंगे कि जब संख्या रेखा पर सभी वास्तविक संख्याएँ निरूपित हो जाती हैं तो रेखा पर कोई रिक्त स्थान नहीं रहता। हम संख्या रेखा पर एक स्वेच्छिक वास्तविक संख्या (arbitrary real number) की रचना नहीं करेंगे और अपने को केवल कुछ सरल अपरिमेय संख्याओं की रचना तक ही सीमित रखेंगे।

उदाहरण 2 : अपरिमेय संख्या $\sqrt{5}$ को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $5=1^2+2^2$ है। इसलिए हम $\sqrt{5}$ की एक समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई के रूप में रचना कर सकते हैं जिसकी भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमश: 1 और 2 हैं।



आकृति 1.2

मान लीजिए OX एक संख्या रेखा है जिस पर O, संख्या 0 तथा A, संख्या 1 को निरूपित करता है। (देखिए आकृति 1.2) OA पर एक लम्ब रेखा AB खींचिए और उस पर बिंदु B इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AB=2.OA$ हो। तब,

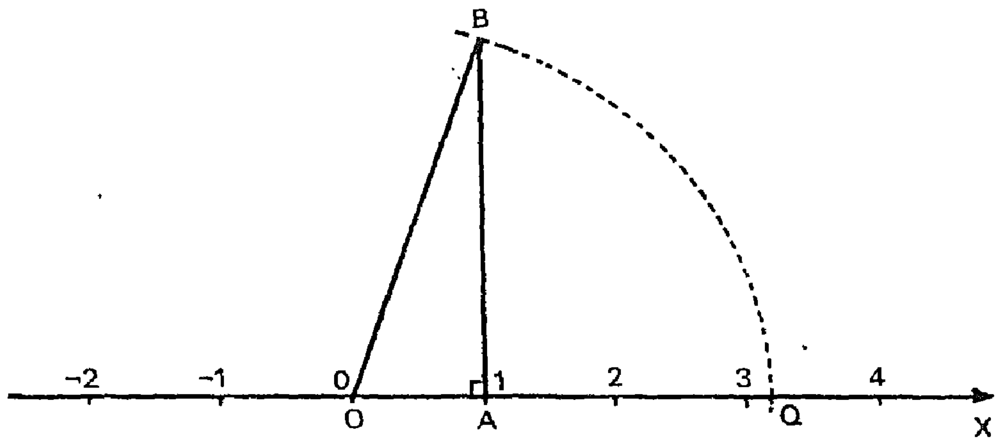
$$\begin{aligned} OB^2 &= OA^2+AB^2 \\ &= 1+4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

अब OX पर O के दाईं ओर एक बिंदु P इस प्रकार अंकित कीजिए कि $OP=OB$ हो। तब, P अपरिमेय संख्या $\sqrt{5}$ को निरूपित करता है।

उदाहरण 3 : वास्तविक संख्या $\sqrt{10}$ को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

हल : उदाहरण 2 की ही तरह हम देखते हैं कि

$$10 = 1^2 + 3^2 \text{ है।}$$



आकृति 1.3

मान लीजिए OX एक संख्या रेखा है जिस पर O, संख्या 0 तथा A, संख्या 1 निरूपित करता है। (देखिए आकृति 1.3) OA पर एक लम्ब रेखा AB खींचिए और उस पर बिंदु B इस प्रकार अंकित कीजिए कि AB=3.OA हो। तब,

$$\begin{aligned} OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\ &= 1 + 9 \\ &= 10 \end{aligned}$$

अब OX पर O के दाईं ओर एक बिंदु Q इस प्रकार अंकित कीजिए कि OQ=OB हो। तब Q संख्या $\sqrt{10}$ निरूपित करता है।

प्रश्नावली 1.3

निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

1. $\sqrt{13}$
2. $\sqrt{17}$
3. $\sqrt{18}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
5. $1+\sqrt{2}$
6. $\sqrt{2}-1$

*7 संख्या $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए ।

8. संख्या रेखा पर ऐसे बिंदुओं के पाँच उदाहरण दीजिए जो परिमेय बिंदु नहीं हैं ।

एकक II

घातांक और करणी

हम घातांकों की शब्दावली सीख चुके हैं और घातांकीय संकेतन में लिखी संख्याओं के गुणा और भाग करने के आधारभूत नियमों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम धनात्मक वास्तविक संख्याओं की घातों का अध्ययन करेंगे। साथ ही, हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जब घातांक एक परिमेय संख्या है।

2.1 भूमिका

अपनी पिछली कक्षाओं में, हमने परिमेय संख्याओं के वर्गों, घनों तथा अन्य पूर्णांकीय घातों के विषय में पढ़ा था। उदाहरणार्थ, $(\frac{1}{3})^2$ को $\frac{1}{3}$ की **द्वितीय घात (second power)** या $\frac{1}{3}$ का वर्ग या $\frac{1}{3}$ पर घातांक 2 या $\frac{1}{3}$ वर्ग पढ़ा जाता है।

साथ ही, यह कि $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

इसी प्रकार, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}$

आपको याद होगा कि ऊपर लगा संख्यांक **(numeral) घातांक (exponent** या **index)** कहलाता है। वह संख्या जिस पर कोई घातांक लगा हो **आधार (base)** कहलाती है। इस प्रकार, $(\frac{1}{3})^2$ में $\frac{1}{3}$ आधार है तथा 2 घातांक है। इसी प्रकार, $(\frac{2}{3})^{-3}$ में $\frac{2}{3}$ आधार है तथा -3 घातांक है।

हमने अब अपने संख्या निकाय को विस्तृत कर लिया है और वास्तविक संख्याएँ प्रविष्ट कर ली हैं। अतः, हम धनात्मक वास्तविक संख्याओं की घातों के बारे में अध्ययन करना चाहेंगे। परिमेय संख्याओं की ही तरह, जब एक वास्तविक संख्या को स्वयं उसी से गुणा किया जाता है तो जो हमें प्राप्त होता है उसे हम उस वास्तविक संख्या की द्वितीय घात या वर्ग कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ संख्या $\sqrt{2}$ का वर्ग है और इसे $(\sqrt{2})^2$ लिखा जाता है। वास्तविक संख्याओं की उच्चतर घातों को भी इसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

इस प्रकार, $(\sqrt{3})^4=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\times 3=9$

$$(\sqrt{5})^3=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{5})=5\sqrt{5}$$

दूसरे शब्दों में, **यदि b एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा m एक धनपूर्णांक है तो b^m उन m गुणनखंडों के गुणनफल को व्यक्त करता है जिनमें से प्रत्येक b है।** अर्थात्,

$$b^m=b\times b\times\ldots\times b \text{ (m गुणनखंड)}$$

परिमेय संख्याओं की ही तरह, हम परिभाषित करते हैं कि **$b^0=1$ जबकि वास्तविक संख्या b शून्य के बराबर नहीं है।**

इस प्रकार,

$$(\sqrt{2})^0=1,\ (\sqrt{3})^0=1,\ (\sqrt{5})^0=1,\ \pi^0=1, \text{ इत्यादि।}$$

यह स्पष्ट है कि **एक वास्तविक संख्या की प्रथम घात स्वयं वह संख्या ही होती है।**

इस प्रकार,

$$(\sqrt{2})^1=\sqrt{2},\ (\sqrt{3})^1=\sqrt{3},\ \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^1=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \text{ इत्यादि।}$$

आपको याद होगा कि हम $\frac{1}{3}$ के लिए 3^{-1}, $\frac{1}{3^2}$ के लिए 3^{-2}, $\frac{1}{(\frac{2}{3})^4}$ के लिए $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$, इत्यादि लिखते हैं। इसी प्रकार, हम $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के लिए $(\sqrt{2})^{-1}$, $\frac{1}{(\sqrt{2})^4}$ के लिए $(\sqrt{2})^{-4}$, इत्यादि लिखेंगे।

अतः परिमेय संख्याओं की ही तरह, यदि **b** एक वास्तविक संख्या तथा **r** एक धनपूर्णांक है तो हम निम्न व्यंजक को b^{-r} से व्यक्त करते हैं :

$$\frac{1}{b \times b \times \ldots \times b}, \text{ (हर में r गुणनखंड)}$$

अर्थात्, $b^{-r} = \frac{1}{b^r}$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक में आधार और घातांक लिखिए :

   (i) $(\sqrt{2})^3$ (ii) $(\sqrt{2})^2$ (iii) 2 (iv) $(a^2)^{-3}$ (v) $(a^{-3})^2$

   (vi) a^{-6} (vii) $(\sqrt{2})^0$ (viii) 1

2. निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में लिखिए :

   (i) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

   (iii) 4 (iv) $\frac{3}{4}$

   (v) $a^{-2} \times a^{-2} \times a^{-2}$

*3. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{8}$ में से प्रत्येक को दो भिन्न प्रकारों से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

4. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $(3a^2)^0$ (ii) $3\ (a^2)^0$ (iii) $(\sqrt{2})^{-4}$

   (iv) $(\sqrt{3})^6$ (v) $\frac{\sqrt{2}}{2^0}$

2.2 संख्याएँ जिनके घातांक परिमेय संख्याएँ हैं

हम जानते हैं कि $2^2=4$ होता है। हम इसे $4^{\frac{1}{2}} = 2$ के रूप में भी लिख लेते हैं। इसी प्रकार, चूँकि

$3^2=9$, अतः हम $9^{\frac{1}{2}} = 3$; लिखते हैं;

$3^3=27$, अतः हम $27^{\frac{1}{3}} = 3$, लिखते हैं ; इत्यादि

व्यापक रूप में, यदि a और b दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तथा n एक धनपूर्णांक इस प्रकार है कि $b^n = a$, तो हम इसे $a^{\frac{1}{n}} = b$ भी लिखते हैं।

उदाहरणार्थ, $(\sqrt{2})^2 = 2$ है। अतः हम $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ लिख सकते हैं। इसी प्रकार, हम $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ लिख सकते हैं।

अब एक नियम सीखने के लिए हम दो उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 : आइए $(\sqrt{2})^6$ पर विचार करें।

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^6 &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\\ &= (\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\\ &= 2\times2\times2 = 2^3\\ &= 2^{\frac{6}{2}}\end{aligned}$$

परन्तु हम $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ लिख सकते हैं।

अतः, हमें ज्ञात होता है कि $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{1}{2}\times 6} = 2^{\frac{6}{2}}$

उदाहरण 2 : आइए $(\sqrt{3})^{-4}$ पर विचार करें।

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}(\sqrt{3})^{-4} &= \frac{1}{(\sqrt{3})^4}\\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3^{\frac{4}{2}}}$$

$$=3^{-\frac{4}{2}}$$

परन्तु हम $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ लिख सकते हैं।

अतः हमें प्राप्त होता है कि $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}=3^{\frac{1}{2}\times(-4)}=3^{-\frac{4}{2}}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्न नियम स्पष्ट होता है .

यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि n धनात्मक है, तो

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

दूसरे शब्दों में, $a^{\frac{1}{n}}$ की m वीं घात $a^{\frac{m}{n}}$ होती है।

अब हम इस नियम का प्रयोग करते हुए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $(8)^{\frac{2}{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त नियम से,

$$(8)^{\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

अब $2^3=2\times2\times2=8$ यह दर्शाता है कि $8^{\frac{1}{3}}=2$ है।

अतः, $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2=2^2=2\times2=4$

उदाहरण 4 : $(16)^{\frac{3}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : उसी नियम से,

$$(16)^{\frac{3}{4}}=\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3$$

साथ ही, $2^4=2\times2\times2\times2=16$ है इसलिए $(16)^{\frac{1}{4}}=2$ है।

अतः, $(16)^{\frac{3}{4}}=\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3=2^3=2\times2\times2=8$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(64)^{\frac{5}{6}}$ (ii) $(32)^{\frac{2}{5}}$

(iii) $(27)^{-\frac{2}{3}}$ (iv) $(25)^{-\frac{3}{2}}$

(v) $(256)^{\frac{5}{4}}$ (vi) $(144)^{\frac{1}{2}}$

(vii) $(8)^{-\frac{1}{2}}$ (viii) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

2. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $4+(64)^{\frac{5}{6}}$

(ii) $10-(8)^{-\frac{1}{3}}$

2.3 घातांकों के नियम

2.3.1 अब हम एक ही आधार वाली घातांकीय संकेतन में लिखी उन संख्याओं के गुणन का अध्ययन करते हैं जिनमें अब आधार एक धनात्मक अपरिमेय संख्या भी हो सकता है। हम कक्षा VII में देख चुके हैं कि जब हम $(\frac{2}{3})^3$ को $(\frac{2}{3})^5$ से गुणा करते हैं तो हमें संख्या $(\frac{2}{3})^{3+5}=(\frac{2}{3})^8$ प्राप्त होती है। व्यापक रूप में, यदि हम एक ही परिमेय संख्या के आधार वाली घातांकीय संकेतन में लिखी दो संख्याओं का गुणा करते हैं तो हमें उसी आधार वाली एक संख्या प्राप्त होती है जिसका घातांक दोनों घातांकों का योग होता है। अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं जिनमें उभयनिष्ठ आधार एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 5 : $(\sqrt{3})^4$ और $(\sqrt{3})^3$ का गुणा कीजिए और गुणनफल को घातांकीय संकेतन में लिखिए।

हल : हम जानते हैं कि

$(\sqrt{3})^4=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ (चार गुणनखंड)

तथा, $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (तीन गुणनखंड)

अतः, $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (4 गुणनखंड) $\times$
$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (3 गुणनखंड)
$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$
($4+3=7$ गुणनखंड)
$= (\sqrt{3})^7 = (\sqrt{3})^{4+3}$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

$$(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^{4+3}$$

क्या आप दर्शा सकते हैं कि $(\sqrt{3})^{4+3} = (\sqrt{3})^7 = 27\sqrt{3}$ है ?

उदाहरण 6 : $(\sqrt{2})^3$ और $(\sqrt{2})^6$ का गुणा कीजिए और गुणनफल को घातांकीय रूप में लिखिए।

हल : हम जानते हैं कि

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (तीन गुणनखंड)

तथा, $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (छः गुणनखंड)

इसलिए, $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \ldots$ ($3+6=9$ गुणनखंडों तक)
$= (\sqrt{2})^9 = (\sqrt{2})^{3+6}$

अतः, हम देखते हैं कि

$$(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^{3+6}$$

क्या आप दर्शा सकते है कि $(\sqrt{2})^{3+6} = (\sqrt{2})^9 = 16\sqrt{2}$ है ?

उपर्युक्त दो उदाहरणों में दोनों घातांक धनात्मक थे। अब हम दो उदाहरण ऐसे लेते हैं जिनमें एक घातांक ऋणात्मक है।

उदाहरण 7 : $(\sqrt{2})^5$ और $(\sqrt{2})^{-3}$ का गुणा कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (पाँच गुणनखंड)

तथा, $(\sqrt{2})^{-3}=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ (हर में तीन गुणनखंड)

अतः, $(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^{-3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

(अंश में पाँच गुणनखंड तथा हर में तीन)

हम हर के तीन गुणनखंडों (प्रत्येक $\sqrt{2}$) को अंश के तीन गुणनखंडों (प्रत्येक $\sqrt{2}$) से काट सकते हैं। तब अंश में 5—3=2 गुणनखंड शेष रह जाएँगे। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

$$(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^{-3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^{5-3}$$

अर्थात्, $(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^{-3}=(\sqrt{2})^{5-3}$

हम देखते हैं कि हम 5—3 को 5+(—3) भी लिख सकते हैं। अतः हम यह भी लिख सकते हैं कि

$$(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^{-3}=(\sqrt{2})^{5+(-3)}$$

क्या आप देख सकते हैं कि $(\sqrt{2})^5\times(\sqrt{2})^{-3}=2$ है ?

उदाहरण 8 : $(\sqrt{3})^4$ और $(\sqrt{3})^{-7}$ का गुणा कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$(\sqrt{3})^4=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ (चार गुणनखंड)

तथा, $(\sqrt{3})^{-7}=\frac{1}{(\sqrt{3})^7}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

(हर में सात गुणनखंड)

अतः, $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-7} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$$\times \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

हम देखते हैं कि अंश में चार गुणनखंड (प्रत्येक $\sqrt{3}$) हर के चार गुणनखंडों (प्रत्येक $\sqrt{3}$) से कट जाते हैं। इस प्रकार, हर में $7-4=3$ गुणनखंड रह जाते हैं। अतः,

$$(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-7} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = (\sqrt{3})^{-3}$$

इस प्रकार, $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-7} = (\sqrt{3})^{-3} = (\sqrt{3})^{-(7-4)} = (\sqrt{3})^{4-7}$

हम देखते हैं कि हम इसे निम्न रूप में भी लिख सकते हैं :

$$(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-7} = (\sqrt{3})^{4+(-7)}$$

क्या आप देख सकते हैं कि $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-7} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ है ?

अब हम गुणनफल $b^m \times b^n$ की व्यापक स्थिति पर विचार करते हैं, जहाँ b एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं। तब,

$b^m = b \times b \times \ldots$ m गुणनखंडों तक

तथा, $b^n = b \times b \times \ldots$ n गुणनखंडों तक

अतः, $b^m \times b^n = (b \times b \times \ldots$ m गुणनखंडों तक$) \times (b \times b \times \ldots$ n गुणनखंडों तक$)$

$= b \times b \times \ldots$ m+n गुणनखंडों तक

$= b^{m+n}$

इस प्रकार, $b^m \times b^n = b^{m+n}$

हम इसकी जाँच कर सकते हैं कि यह परिणाम उस स्थिति में भी सत्य है जबकि m या n या दोनों ही शून्य के बराबर हैं।

अब, मान लीजिए m और n ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $m \geqslant n$ है। तब,

$$b^m \times b^{-n} = b^m \times \frac{1}{b^n}$$

$$= \frac{b \times b \times \ldots m \text{ गुणनखंडों तक}}{b \times b \times \ldots n \text{ गुणनखंडों तक}}$$

$$= b \times b \times \ldots (m-n) \text{ गुणनखंडों तक}$$

हम देखते हैं कि चूँकि $m \geqslant n$ है, अत: $m-n \geqslant 0$ है।

इस प्रकार, $$b^m \times b^{-n} = b^{m-n}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि जब $m < n$ है, तो

$$b^m \times b^{-n} = \frac{1}{b^{n-m}} = \frac{1}{b^{-(m-n)}} = b^{m-n}$$

यह ध्यान देने योग्य बात है कि हम $b^m \times b^{-n}$ के लिए $\frac{b^m}{b^n}$ भी लिख सकते हैं। इस प्रकार हमें निम्न व्यापक नियम प्राप्त होता है :

यदि b एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$b^m \times b^n = b^{m+n}$$

तथा, $$\frac{b^m}{b^n} = b^m \times b^{-n} = b^{m-n}$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाले दो घातांकियों (exponentials) का गुणा करते हैं तो घातांक जुड़ जाते हैं तथा जब हम एक को दूसरे से भाग देते हैं तो अंश के घातांक में से हर का घातांक घट जाता है।

हम यह मान लेते हैं कि उपर्युक्त नियम उस स्थिति में भी सत्य है जबकि घातांक m और n परिमेय संख्याएँ हैं :

घातांकियों के गुणनफल के उपर्युक्त नियम को गुणनखंडों की परिमित संख्या तक के लिए लागू किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$b^m \times b^n \times b^p \times \ldots \times b^r = b^{m+n+p+\cdots+r}$$

जहाँ b कोई धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा m, n, p,...,r परिमेय संख्याएँ हैं।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9 : $(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}} \times (\sqrt{2})^{-\frac{9}{2}}$ का मान निकालिए ।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही हैं। अत: गुणन में घातांकों को जोड़ना पड़ेगा। इसलिए,

$$(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}} \times (\sqrt{2})^{-\frac{9}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{5}{2}-\frac{9}{2}} = (\sqrt{2})^{-\frac{4}{2}} = (\sqrt{2})^{-2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 10 : $(\sqrt{5})^{-\frac{5}{2}} \times (\sqrt{5})^{-\frac{3}{2}}$ का मान निकालिए।

हल : पुनः आधार एक ही हैं। अतः, गुणन में घातांकों को जोड़ना पड़ेगा। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(\sqrt{5})^{-\frac{5}{2}} \times (\sqrt{5})^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{5})^{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = (\sqrt{5})^{-\frac{8}{2}} = (\sqrt{5})^{-4}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5})^4}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{5}\times\sqrt{5})} = \frac{1}{5\times 5}$$

$$= \frac{1}{25}$$

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न में से प्रत्येक को घातों के गुणा या भाग के रूप में इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि उनमें a और b दोनों (धनात्मक मानिए) केवल एक बार आएँ और सभी घातांक धनात्मक रहें :

   (i) $\frac{3^{-2}a^{-2}b^{-3}}{3^{-3}a^{-4}b}$ (ii) $\left(\frac{a^5}{a^{-3}}\right)^{-2}$

(iii) $\left(\dfrac{a^0b^{-1}a^{-2}ba^{-3}}{ab^{-1}}\right)^{-2}$ (iv) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)$

2. निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं ?

(i) $3^2 \times 2^3 = 3^{2+3}$ (ii) $3^2 \times 2^3 = 2^{2+3}$

(iii) $(\sqrt{2})^3 \times 2 = (\sqrt{2})^{3+1}$

(iv) $(\sqrt{2})^3 \times 2 = (\sqrt{2})^{3+2}$

(v) $(\sqrt{5})^3 \times \sqrt{25} = (\sqrt{5})^{3+1}$

(vi) $(\sqrt{5})^3 \times \sqrt{25} = (5)^{3+2}$

(vii) $3^2 \times 2^2 = 6^2$

(viii) $a^{-3} + a^{-3} = a^{-6}$, a धनात्मक है

(ix) $(\sqrt{2})^4 \div (\sqrt{2})^0 = (\sqrt{2})^3$

(x) $(\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^0 = (\sqrt{3})^4$

(xi) $a^4 \div a^6 = a^2$, a धनात्मक है

(xii) $a^4 \div a^6 = a^{-2}$, a धनात्मक है

(xiii) $a^3 \times a^{-2} = a^5$, a धनात्मक है

3. निम्न में से प्रत्येक में k निर्धारित कीजिए :

(i) $(\sqrt{2})^6 \div (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{k-1}$

(ii) $(\sqrt{3})^5 \div (\sqrt{3})^{-4} = (\sqrt{3})^{2k+1}$

(iii) $(\sqrt{2})^{-3} \times (\sqrt{2})^7 = 2^k$

2.3.2 अब हम घातांकीय संकेतन में लिखी एक वास्तविक संख्या की घात के लिए कोई नियम खोजने का प्रयत्न करते हैं।

उदाहरणार्थ, निम्न पर विचार कीजिए :

$$[(\sqrt{2})^3]^2 = (\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^3$$

आधार एक ही हैं। अतः, गुणन में घातांकों को जोड़ना पड़ेगा। हमें निम्न प्राप्त

होता है

$$[(\sqrt{2})^3]^2 = (\sqrt{2})^{3+3} = (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^{3\times 2}$$

आइए कुछ और उदाहरण लें ।

उदाहरण 11 : $(\pi^4)^5$ पर विचार कीजिए ।

हल : हम जानते हैं कि

$$(\pi^4)^5 = \pi^4 \times \pi^4 \times \pi^4 \times \pi^4 \times \pi^4$$

अब आधार एक ही हैं । अतः, गुणन में घातांकों को जोड़ना पड़ेगा । हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(\pi^4)^5 = \pi^{4+4+4+4+4} = \pi^{20} = \pi^{4\times 5}$$

उदाहरण 12 : पुनः $\left[(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\right]^{-6}$ पर विचार कीजिए ।

हल : हम पढ़ चुके हैं कि

$$\left[(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\right]^{-6} = \frac{1}{\left[(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\right]^6}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5})^4} = (\sqrt{5})^{-4} = (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}\times(-6)}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्न नियम स्पष्ट होता है :

यदि **b** एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा **m** और **n** पूर्णांक, तो

$$(b^m)^n = b^{mn}$$

अब हम एक अन्य नियम खोजने के लिए कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं ।

उदाहरण 13 : आइए $2^{\frac{3}{2}}$ पर विचार करें ।

हल : अब, $2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

पुनः, $(2^3)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि $2^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}}$

उदाहरण 14 : पुनः, $(27)^{\frac{2}{3}}$ पर विचार कीजिए

हल : अब $(27)^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2$

साथ ही, $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ है । अतः $(27)^{\frac{1}{3}} = 3$ है । अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(27)^{\frac{2}{3}} = (3)^2 = 9$$

पुनः,
$$\{(27)^2\}^{\frac{1}{3}} = \{27 \times 27\}^{\frac{1}{3}}$$
$$= \{3^3 \times 3^3\}^{\frac{1}{3}} = \{3^6\}^{\frac{1}{3}} = \{3^{2+2+2}\}^{\frac{1}{3}}$$
$$= \{3^2 \times 3^2 \times 3^2\}^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

$$\{(27)^2\}^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{2}{3}}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्न नियम स्पष्ट होता है :

यदि b एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, m एक पूर्णांक है तथा n एक धनपूर्णांक है, तो

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$$

उदाहरण 15 : $(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$ पर विचार कीजिए ।

हल : हम जानते हैं कि $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ है । अतः;

अब, $4^{\frac{3}{4}}=(4^3)^{\frac{1}{4}}=(64)^{\frac{1}{4}}=(16\times4)^{\frac{1}{4}}$

$$=\{(2\sqrt{2})^4\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$$

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है कि

$$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{4}}$$

उपर्युक्त उदाहरण से निम्न नियम स्पष्ट होता है :

यदि b एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा r और s परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$(b^r)^s=b^{rs}$$

उदाहरण 16 : यदि $\left\{(\sqrt{2})^3\right\}^{\frac{5}{2}}=(\sqrt{2})^{2a+1}$ हो, तो a ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

वाम पक्ष $=\{(\sqrt{2})^3\}^{\frac{5}{2}}=(\sqrt{2})^{\frac{3\times5}{2}}=(\sqrt{2})^{\frac{15}{2}}$

अतः, $(\sqrt{2})^{\frac{15}{2}}=(\sqrt{2})^{2a+1}$

इसलिए, $\frac{15}{2}=2a+1$ जिससे, $15=4a+2$,

अर्थात्, $4a=13$

और इसलिए, $a=\frac{13}{4}$

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं और क्यों ? (a सदैव धनात्मक है)

(i) $(a^3\times a)^{-2}=a^{-7}$ (ii) $(a^3\times a)^2=a^7$

(iii) $(a^2\times a^{-1})^2=a^3$ (iv) $(a^4\times a^{-1})^2=a^6$

(v) $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-5} = (\sqrt{2})^{-15}$

(vi) $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{2}$

2. निम्न का मान निकालिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

(i) $\{(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-5}\}^6$ (ii) $\{(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-1}\}^5$

(iii) $\{(\sqrt{3})^5 \div (\sqrt{3})^2\}^{-2}$ (iv) $\left\{\frac{(\sqrt{5})^6 \times (\sqrt{5})^{-8}}{(\sqrt{5})^{-2}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

3. यदि $3 \times (\sqrt{3})^a \times (\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = 3 \times \sqrt{3}$ हो, तो a ज्ञात कीजिए।

4. यदि $2 \times (\sqrt{2})^5 \times (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} = (\sqrt{2})^{a+1}$ हो, तो a ज्ञात कीजिए।

2.4 करणियों का सरलीकरण

आपको याद होगा कि $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, 2 का वर्गमूल कहलाता है, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, 3 का वर्गमूल कहलाता है। साथ ही $8^{\frac{1}{3}} = 2$ है और हम इसे 8 का तृतीय मूल (third root) या घनमूल (cube root) कहते हैं। इसी प्रकार, $(81)^{\frac{1}{4}} = 3$, 81 का चतुर्थमूल (fourth root) कहलाता है। व्यापक रूप में,

यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा n एक धनपूर्णांक है तो धनात्मक वास्तविक संख्या $a^{\frac{1}{n}}$, a का n वाँ मूल (nth root) कहलाती है और इसे $\sqrt[n]{a}$ से भी व्यक्त किया जाता है। इस संकेत में, जो एक करणी (radical) कहलाता है, n को करणी का घातांक (index of the radical) कहते हैं। साथ ही 'a' करणीगत राशि (radicand) कहलाती है।

टिप्पणी : (i) जब $n = 1$ है, तो $a^{\frac{1}{n}} = a^1 = a$ और तब $\sqrt[n]{a}$ = स्वयं a होगा

(ii) जब $n = 2$ है, तो करणी चिह्न के साथ घातांक नहीं लिखा जाता है जैसे कि हम पहले से ही वर्गमूल के लिए '$\sqrt{\ }$' का प्रयोग करते रहे हैं।

अब हम एक ही घातांकों वाली करणियों के गुणन के लिए एक नियम खोजने के लिए दो उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 17 : $\sqrt{9}\times\sqrt{16}$ का मान निकालिए।

हल : हम जानते हैं कि $3^2=9$ है। अत: $\sqrt{9}=3$ है। साथ ही, $4^2=16$ है और हमें $\sqrt{16}=4$ प्राप्त होता है।

अत:, $\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times4=12$

आइए अब $\sqrt{9\times16}$ का मान निकालें।

हम जानते हैं कि $9\times16=144=(12)^2$ है। अत: हमें प्राप्त होता है कि

$$\sqrt{9\times16}=12$$

हम देखते हैं कि $\sqrt{9}\times\sqrt{16}=\sqrt{9\times16}$

उदाहरण 18 : $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}$ का मान निकालिए।

हल : हम जानते हैं कि $27=3\times3\times3=3^3$ है। अत: हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\sqrt[3]{27}=(27)^{\frac{1}{3}}=3$$

साथ ही, $8=2\times2\times2=2^3$ है। अत: हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\sqrt[3]{8}=(8)^{\frac{1}{3}}=2$$

अत:, $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}=3\times2=6$

अब हम $\sqrt[3]{27\times8}$ का मान निकालते हैं।

हमें प्राप्त होता है कि $27\times8=216=6\times6\times6=6^3$

अत:,

$$\sqrt[3]{27\times8}=(27\times8)^{\frac{1}{3}}=6$$

हम पुन: देखते हैं कि $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{27\times8}$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही घातांक वाली दो करणियों का गुणा करते हैं तो हमें उसी घातांक वाली एक करणी प्राप्त होती है जिसकी करणीगत राशि दोनों करणीगत राशियों का गुणनफल होती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं और n एक धनपूर्णांक है, तो

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$$

अब हम दो उदाहरणों पर विचार करते हैं जो एक करणी को उसी घातांक वाली अन्य करणी से भाग के लिए नियम स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 19 : $\sqrt{25} \div \sqrt{4}$ का मान निकालिए।

हल : हम जानते हैं कि $25 = 5 \times 5 = 5^2$ है। इसलिए,

$$\sqrt{25} = 5$$

साथ ही, $4 = 2 \times 2 = 2^2$, है। इसलिए,

$$\sqrt{4} = 2$$

अतः, $\sqrt{25} \div \sqrt{4} = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$

आइए अब $\sqrt{\frac{25}{4}}$ परिकलित करें।

हम जानते हैं कि $\frac{25}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ है।

अतः, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

$$\sqrt{25} \div \sqrt{4} = \sqrt{25 \div 4}$$

उदाहरण 20 : $\sqrt[3]{27} \div \sqrt[3]{125}$ का मान निकालिए।

हल : $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

अतः, $\sqrt[3]{27} = 3$

पुनः, $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$,

अतः, $\sqrt[3]{125} = 5$

अतः, $\sqrt[3]{27} \div \sqrt[3]{125} = 3 \div 5 = \frac{3}{5}$

आइए अब $\sqrt[3]{27 \div 125}$ परिकलित करें।

$$27 \div 125 = \frac{27}{125} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

अतः, $\sqrt[3]{27 \div 125} = (27 \div 125)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$

पुनः हम देखते हैं कि

$$\sqrt[3]{27} \div \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{27 \div 125}$$

हम देखते हैं कि

यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तथा n एक धनपूर्णांक है, तो

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$$

हम कुछ और उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 21 : $\sqrt{72}$ को सरल कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 4 \times 9$$

उपर्युक्त नियम का दो बार प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\sqrt{72} = \sqrt{8 \times 9} = \sqrt{8} \times \sqrt{9} = \sqrt{2 \times 4} \times \sqrt{9} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{9}$$

पुनः, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ है। अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\sqrt{72} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

क्या आप देख सकते हैं कि हम $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ भी लिख सकते थे।

उदाहरण 22 : $\sqrt{\frac{63}{5}}$ को सरल कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\frac{63}{5} = \frac{9 \times 7}{5} = \frac{9 \times 7 \times 5}{5^2} = \frac{9 \times 35}{5^2}$$

ऊपर प्राप्त किए गए नियम का प्रयोग करके हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\sqrt{\frac{63}{5}} = \sqrt{\frac{9 \times 35}{5^2}} = \frac{\sqrt{9 \times 35}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{35}}{5}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{35}}{5}$$

उदाहरण 23 : $\sqrt[10]{1024} \div \sqrt[5]{32}$ को सरल कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$$

अतः, $\sqrt[10]{1024}=2$

साथ ही, $32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$

अतः, $\sqrt[5]{32}=2$

अतः हमें प्राप्त होता है कि

$$\sqrt[10]{1024}\div\sqrt[5]{32}=2\div2$$
$$=1$$

प्रश्नावली 2.5

अब तक पढ़े हुए नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न संख्याओं को सरल रूप में लिखिए :

1. $32-\frac{1}{3}\sqrt{18}$
2. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$
3. $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{20}}$
4. $\sqrt{11}\,(\sqrt{11}-\sqrt{44})$
5. $\dfrac{\sqrt{98}\times\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
6. $\dfrac{\sqrt{75}\times\sqrt{60}\times\sqrt{63}}{\sqrt{200}}$
7. $\dfrac{\sqrt{98}\times\sqrt{12}\times\sqrt{27}}{\sqrt{49}\times\sqrt{32}}$
8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

यह मानते हुए कि a और b धनात्मक संख्याएँ हैं, निम्न को सरल कीजिए :

9. $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\sqrt{a^5b^2}$
10. $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^3}}\times\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{b^{-1}a^{-1}}}\times\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times\sqrt{\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}}$

11. $\left\{\sqrt[3]{a^2b}\times\frac{1}{\sqrt[3]{ab^2}}\right\}^{-3}$

12. $\{(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\div(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})\}^3$

13. $\{\sqrt{24a^4b^3}\div\sqrt{2a^2b}\}^{\frac{3}{2}}$

14. $\sqrt{3a}\times(\sqrt{3a}+\sqrt{27a^3})$

15. $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{2b}}{\sqrt{b}}$

16. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

मुख्य संकल्पनाएं

- धनात्मक वास्तविक आधार वाले घातांकीय
- परिमेय घातांकों के लिए घातांकों के नियम
- करणी
- करणीगत राशि
- घातांक
- एक ही घातांक वाली करणियों के लिए नियम

एकक III

बीजीय व्यंजक

अभी तक हमने परिमेय गुणांकों वाले बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions) के बारे में पढ़ा है। इस एकक में, हम वास्तविक गुणांकों (real coefficients) वाले बीजीय व्यंजकों के बारे में अध्ययन करेंगे। विशिष्ट रूप में, हम सीखेंगे कि एक चर में बहुपदों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। हम परिमेय व्यंजकों (rational expressions) और उन पर संक्रियाओं पर भी विचार करेंगे।

3.1 पुनरावलोकन

कक्षा VII में हमने परिमेय गुणांकों वाले बीजीय व्यंजकों का अध्ययन किया था। विशिष्ट रूप में, हमने सीखा था कि एक चर में बहुपदों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है।

याद कीजिए कि **बीजीय व्यंजक** एक संख्या या मूलभूत संक्रियाओं का प्रयोग करके बना संख्याओं (अक्षर संख्याएँ सम्मिलित हैं) का एक संयोग होता है।

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n \qquad (1)^*$$

के रूप का बीजीय व्यंजक एक चर x में एक **बहुपद (polynomial)** कहलाता है। प्रत्येक पद में x का घातांक एक पूर्ण संख्या है। तथा a_0, a_1, a_2, ..., a_n वास्तविक संख्याएँ हैं।

*हम देखते हैं कि सुविधा के लिए हमने (1) में (n+1) स्थिरांकों a_0, a_1, a_2, .., a_n का प्रयोग किया है, क्योंकि हो सकता है कि अनेक स्थितियों में वर्णमाला के अक्षर a, b, c, इत्यादि पर्याप्त न हों। हम यह भी देखते हैं कि व्यंजक (1) के प्रत्येक पद में x का घातांक वही संख्या है जो a के नीचे लगी है।

x में एक एकपदी (monomial) की घात (degree) उस एकपदी में x का घातांक होता है। **एक बहुपद की घात उसके विभिन्न पदों की घातों में सबसे बड़ी घात होती है।** इस प्रकार एकपदी $\frac{5}{2}x^3$ की घात 3 है जबकि बहुपद $\frac{2}{9}x - \frac{5}{3}x^5 + \frac{2}{7}x^3$ की घात 5 है।

हम पढ़ चुके हैं कि परिमेय गुणांकों वाले बहुपदों को किस प्रकार जोड़ा (या घटाया) जाता है। हम केवल समान पदों (like terms) को इकट्ठा करते हैं और जोड़ (या घटा) लेते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{2}{5}x^4 + \frac{3}{7}x^5\right) - \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{3}{9}x^4 + \frac{4}{9}x^5\right)$$

$$= \frac{-1}{9}x + \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^2\right) + \left(\frac{-2}{5}x^4 + \frac{3}{9}x^4\right) + \left(\frac{3}{7}x^5 - \frac{4}{9}x^5\right)$$

$$= \frac{-1}{9}x + \frac{6}{9}x^2 + \frac{-3}{45}x^4 - \frac{1}{63}x^5$$

$$= \frac{-1}{9}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{63}x^5$$

जो हम पिछली कक्षा में पढ़ चुके हैं उससे अपने को पूर्ण रूप से अवगत कराने के लिए आइए निम्न पुनरावलोकन प्रश्नावली को हल करें।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न बहुपदों की घातें क्या-क्या हैं ?

(i) $\frac{1}{3}x^9 - \frac{2}{7}x^4 + \frac{17}{19}x$

(ii) $\frac{8}{11}x^2 - \frac{13}{17}x^5 + \frac{9}{13}x^{11} + \frac{12}{19}x^{25}$

(iii) $\frac{-3}{8}y - \frac{5}{6}y^3 + \frac{8}{15}y$

2. निम्न एकपदियों को उनकी घातों के आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :

$$-\frac{8}{9}x, \frac{2}{11}, \frac{99}{100}x^7, \frac{101}{10}x^5$$

3. बहुपदों के निम्न युग्मों को जोड़िए :

(i) $\frac{2}{7}y^3 - \frac{1}{7}y^2 + \frac{6}{7}y, \frac{7}{8}y - \frac{5}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^3$

(ii) $6 + \frac{5}{6}z + \frac{2}{5}z^2 - \frac{80}{9}z^3, \frac{3}{5}z^2 + \frac{10}{11}z^3 + \frac{100}{9}z^5$

4. बहुपद $\frac{83}{7}y + \frac{18}{5}y^2 - \frac{6}{7}y^3$ को बहुपद $\frac{6}{5}y^2 + \frac{1}{7}y^3 - \frac{2}{7}y^5$ में से घटाइए।

5. निम्न बीजीय व्यंजक में से प्रत्येक में x का गुणांक लिखिए :

$\frac{7}{8}xy, \frac{9}{4}xyz, \frac{-15}{11}txz$

6. $6.5x^4 + 6.4x^3 - 6.3x^2$ और $3.2x^4 + 3.1x^2 - 6.2x^3$ के योग को $8.1x^3 + 8.2x^2$ और $6.1x^4 + 3.7x^3 + 8$ के योग में से घटाइए।

7. x में पाँच बहुपद लिखिए जो सभी घात 5 के हों।

8. यदि हम एक ही घात के दो बहुपदों को जोड़ें तो क्या परिणामी बहुपद पुनः उसी घात का होता है या क्या वह उस घात से छोटी या बड़ी घात का हो सकता है ?

9. बहुपद $3x^2-7x+7$ प्राप्त करने के लिए बहुपद $7x^2-5x+6$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

10. बहुपद $10x^2-3x+8$ प्राप्त करने के लिएं बहुपद $8x^2-2x+5$ में से क्या घटाना चाहिए ?

3.2 वास्तविक गुणांकों वाले बहुपद : योग और व्यवकलन

अब हम मान रहे हैं कि गुणांक वास्तविक संख्याएँ भी हो सकते हैं। वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों के योग और व्यवकलन के लिए वही नियम हैं जो परिमेय गुणांकों वाले बहुपदों के लिए था। उदाहरणार्थ, $\sqrt{2}\,x$ एक एकपदी है जिसमें x का गुणांक $\sqrt{2}$ है। यदि हम इस एकपदी में एकपदी 3x को जोड़ना चाहें, तो परिणाम निम्न होगा :

$$\sqrt{2}\,x+3x=(\sqrt{2}+3)x,$$

अर्थात् योग में x का गुणांक वास्तविक संख्याओं $\sqrt{2}$ और 3 का योग है जोकि क्रमशः $\sqrt{2}\,x$ और 3x में x के गुणांक हैं। आइए वास्तविक गुणांकों वाले बहु-पदों के योग और व्यवकलन के कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : बहुपदों $\frac{1}{3}x+\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$

और $\frac{2}{3}x-\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$

को जोड़िए।

हल : $$\left(\frac{1}{3}x+\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)+\left(\frac{2}{3}x-\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x\right)+\left(\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{2}\,x^2\right)+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}x^3-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)x^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^3$$

$$=x-\frac{2}{\sqrt{3}}x^3$$

उदाहरण 2 : बहुपद $\frac{1}{3}x+\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ को

बहुपद $\frac{2}{3}x-\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$

में से घटाइए।

हल : वाँछित बहुपद निम्न हैं :

$$\left(\frac{2}{3}x-\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)-\left(\frac{1}{3}x+\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x\right)+(-\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{2}\,x^2)+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}x^3+\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)x+(-\sqrt{2}-\sqrt{2})x^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^3$$

$$=\frac{1}{3}x-2\sqrt{2}\,x^2$$

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न एकपदियों को उनकी घातों के आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :

$$\sqrt{2}\,x^5, -\frac{1}{3}x^4, \frac{3}{17}x^{11}, \frac{6}{1.5}x^7$$

2. निम्न बीजीय व्यंजकों में x का गुणांक लिखिए :

(1.2) ax, $\frac{1}{-\sqrt{3}}bx$, $\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{5}}cdx$

3. बहुपदों के निम्न युग्मों को जोड़िए :

(i) $\frac{6}{5}x-\frac{2}{\sqrt{7}}x^2+\frac{1}{3}x^3, \sqrt{5}+\frac{1}{3}x^2-1.2x^3$

(ii) $\frac{-1}{7}y+\frac{2}{\sqrt{7}}y^2+\sqrt{11}y^4,\ 8-y^{11}-\frac{1}{\sqrt{7}}y^2$

4. बहुपद $y^{99}-\frac{1}{3}y^{98}+\sqrt{17}$ को $\frac{1}{\sqrt{3}}y^{99}+\frac{2}{\sqrt{3}}y^{98}-6$ में से घटाइये।

5. सरल कीजिए :

$$\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)+\left(3-\frac{2}{9}x+\sqrt{2}x^2\right)-\left(2+\frac{1}{9}x-2\sqrt{2}x^2\right)$$

6. सरल कीजिए :

$$\left(\pi x^2+\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)-\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}x+\sqrt{\frac{6}{5}}\,x^2\right)$$

3.3 बहुपदों का गुणन

याद कीजिए कि यदि n एक धनपूर्णांक है तथा x एक अक्षर संख्या है, तो बीजीय व्यजंक $x \times x \times x \times \ldots$ n गुणनखंडों तक को x^n से व्यक्त किया जाता है।

साथ ही, परिपाटी से $x^0=1$ लिखा जाता है।

यदि x^m और x^n दो एकपदी हैं (यहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं), तो हम गुणनफल $x^m \times x^n$ को x^{m+n} के रूप में परिभाषित करते हैं। उदाहरणार्थ,

$$x^3 \times x^4 = x^{3+4} = x^7$$
$$x^2 \times x^{10} = x^{2+10} = x^{12}$$
$$x^6 \times x^0 = x^{6+0} = x^6$$

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न गुणन कीजिए :

(i) $x^4 \times x^7$ (ii) $x^2 \times x^6$

(iii) $x^0 \times x^3$ (iv) $x^6 \times x^{14}$

2. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $x^2 \times x^3 = \ldots$ (ii) $x^2 \times \ldots = x^8$

(iii) $x^6 \times \ldots = x^8$ (iv) $x^0 \times \ldots = x^5$

3.3.1 दो एकपदियों का गुणनफल

मान लीजिए ax^m और bx^n वास्तविक गुणांकों वाले दो एकपदी हैं। तब ax^m और bx^n का गुणनफल $(a \times b)x^{m+n}$ लिया जाता है।

अर्थात्,

$$(ax^m) \times (bx^n) = (a \times b)x^{m+n}$$

ध्यान दीजिए कि गुणनफल में x^{m+n} का गुणांक दिए हुए एकपदियों के गुणांकों का गुणनफल है। गुणनफल में x का घातांक $m+n$ दोनों गुणनखंडों में x के घातांकों का योग है।

उदाहरण 3 : $2x^3$ और $\frac{1}{3}x^7$ का गुणा कीजिए।

हल : परिभाषा से,

$$(2x^3) \times \left(\frac{1}{3}x^7\right) = \left(2 \times \frac{1}{3}\right)x^{3+7}$$

$$= \frac{2}{3}x^{10}$$

उदाहरण 4 : $\frac{-1}{\sqrt{7}}x^5$ और $\frac{10}{11}x^{13}$ का गुणा कीजिए।

हल :

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}x^5\right) \times \left(\frac{10}{11}x^{13}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{7}} \times \frac{10}{11}\right)x^{5+13}$$

$$= \frac{-10}{11\sqrt{7}}x^{18}$$

2. $\left(\frac{-3}{8}x\right)\times\left(4x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)$

3. $\left(\frac{1}{6}x^5\right)\times\left(x^3+\frac{\sqrt{8}}{11}\right)$

4. $\left(\frac{-10x}{11}\right)\times\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{6}\right)$

3.3.3 ऊपर हमने बहुपद का एक एकपदी से गुणा करना सीखा है। अब हम वास्तविक गुणांकों वाले दो बहुपदों का गुणा करना सीखेंगे।

मान लीजिए हमें वास्तविक गुणांकों वाले दो बहुपद दिए हुए हैं। सुविधा के लिए, आइए इन्हें P और Q कहें। तब P, एक बहुपद होने के कारण, कई एकपदियों का योग है। हम इनमें से प्रत्येक एकपदी का बहुपद Q से गुणा कर सकते हैं। **ऐसे सभी गुणनफलों का योग P और Q का गुणनफल कहलाता है।**

उदाहरण 7 : $2x+3$ को $7x-4$ से गुणा कीजिए।

हल : $(2x+3)\times(7x-4)$

$$=(2x)\times(7x-4)+3\times(7x-4)$$
$$=(2\times7)x^{1+1}+(2x)\times(-4)+3\times(7x)+3\times(-4)$$
$$=14x^2-8x+21x-12$$
$$=14x^2+13x-12$$

उदाहरण 8 : $a-bx$ को $a+bx$ से गुणा कीजिए, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं।

हल : $(a-bx)\times(a+bx)$

$$=a\times(a+bx)+(-bx)\times(a+bx)$$
$$=a^2+a\times(bx)+(-bx)\times a+(-bx)\times(bx)$$
$$=a^2+abx-abx-b^2x^2$$
$$=a^2-b^2x^2$$

उदाहरण 9 : $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+1$ को $\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$ से गुणा कीजिए।

हल : $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+1\right)\times\left(\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{3}x\left(\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)+1\left(\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(\frac{4}{5}x^4\right)+\left(\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(-\frac{2}{3}x\right)+\left(\frac{1}{2}x^2\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}x\right)\times\left(\frac{4}{5}x^4\right)+\left(\frac{1}{3}x\right)\times\left(\frac{-2}{3}x\right)+\left(\frac{1}{3}x\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)+1\times\left(\frac{4}{5}x^4\right)+1\times\left(-\frac{2}{3}x\right)+1\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{4}{10}x^6-\frac{2}{6}x^3+\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{15}x^5-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{27}x+\frac{4}{5}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{2}{5}x^6+\frac{4}{15}x^5+\frac{4}{5}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^2-\frac{16}{27}x+\frac{2}{9}$$

उदाहरण 10 : $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}y-y^2$ को $6-\sqrt{5}\,y$ से गुणा कीजिए।

हल : $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}y-y^2\right)(6-\sqrt{5}\,y)$

$$=\sqrt{2}\times6+\sqrt{2}\times(-\sqrt{5}\,y)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\times6+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\times(-\sqrt{5}\,y)+(-y^2)\times6+(-y^2)\times(-\sqrt{5}\,y)$$

$$=6\sqrt{2}-\sqrt{10}\,y+2\sqrt{3}\,y-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}y^2-6y^2+\sqrt{5}\,y^3$$

$$=6\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{10})y-\left(6+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)y^2+\sqrt{5}\,y^3$$

प्रश्नावली 3.6

दर्शाई गई संक्रियाएँ कीजिए :

1. $(x+a)\times(x+1)$
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+x\right)\times\left(\frac{1}{3}x+1\right)$
3. $(x-1)\times(x^2+x+1)+(2.5x^2+1.7x-1)$
4. $\left(x+\frac{2}{3}\right)\times(x-\sqrt{5})-\left(8x+\frac{1}{\sqrt{11}}x^2\right)$
5. $\left(\frac{3}{4}x-\frac{13}{18}\right)\times\left(\frac{3}{4}x+\frac{13}{18}\right)+\left(\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x\right)-\left(\frac{7}{8}x-\frac{3}{4}\right)$
6. $\left(\frac{1}{3}z^2+z+1\right)\times\left(z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{9}\right)$
7. $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}z-z^2\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+z\right)$

3.4 बहुपदों का विभाजन

हम संख्याओं के विभाजन से पहले से ही परिचित हैं। उदाहरणार्थ, जब हम 15 को 3 से विभाजित करना चाहते हैं तो हम अपने आप से यह प्रश्न पूछते हैं :

15 प्राप्त करने के लिए हम 3 को किससे गुणा करें ? हमें ज्ञात होता है कि हमारे प्रश्न का उत्तर 5 है और इसलिए हम कहते हैं कि

$$15\div3=5$$

बहुपदों का विभाजन भी इसी प्रकार परिभाषित किया गया है। उदाहरणार्थ, दो बहुपदों $14x^2+13x-12$ और $2x+3$ को लीजिए। पिछले अनुच्छेद के उदाहरण 7 में हमने देखा था कि यदि हम $2x+3$ को $7x-4$ से गुणा करें तो हमें $14x^2+13x-12$ प्राप्त होता है। अतः, हम कह सकते हैं कि $14x^2+13x-12$ भाग (divided by) $2x+3$, $7x-4$ है। हम इसे निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$(14x^2+13x-12)\div(2x+3)=7x-4^*$$

मान लीजिए पिछले अनुच्छेद में हमने $2x+3$ और $7x-4$ का गुणा नहीं किया है और हमें $14x^2+13x-12$ को $2x+3$ से भाग देने को कहा जाता है। हम बहुपद $7x-4$ किस प्रकार प्राप्त करेंगे ? हम देखते हैं कि $14x^2+13x-12$ की घात 2 है तथा सबसे बड़ी घात वाले पद x^2 का गुणांक 14 है। दूसरी ओर, $2x+3$ की घात 1 है तथा इसमें सबसे बड़ी घात वाले पद x का गुणांक 2 है। अब $14x^2$ प्राप्त करने के लिए हम 2x को किस व्यंजक से गुणा करें ? स्पष्ट है 7x से। अतः आइए $2x+3$ को 7x से गुणा करें। हमें बहुपद

$$(7x)\times(2x+3)=14x^2+21x$$

प्राप्त होता है। यदि हम इस बहुपद को $14x^2+13x-12$ में से घटाएँ तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$14x^2+13x-12-(14x^2+21x)=-8x-12$$

अब $-8x-12$ तथा $2x+3$ दोनों ही की घात 1 है। यदि हम $(2x+3)$ को -4 से गुणा करें तो स्पष्टतया हमें $-8x-12$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि $14x^2+13x-12$ प्राप्त करने के लिए $7x-4$ ही वह बहुपद है जिसका $2x+3$ के साथ गुणा किया जाना चाहिए।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 11 : बहुपद $x^2+7x+12$ को $x+4$ से भाग दीजिए।

हल : $x^2+7x+12$ में सबसे बड़ी घात वाला पद x^2 है और उसका गुणांक 1 है। $x+4$ में सबसे बड़ी घात वाला पद x है और उसका गुणांक 1 है। अतः हम $x+4$ को x से गुणा करते हैं। हमें $(x+4)\times x=x^2+4x$ प्राप्त होता है।

---

*हम पढ़ चुके हैं कि हम किसी भी संख्या को शून्य से विभाजित नहीं कर सकते। इसी प्रकार, बहुपदों की स्थिति में x के ऐसे किसी भी मान के लिए जिससे हर शून्य के बराबर हो जाए विभाजन मान्य नहीं है। अतः उपर्युक्त उदाहरण में $x=-\frac{3}{2}$ के लिए, जिससे हर $2x+3$ शून्य के बराबर हो जाता है, विभाजन मान्य नहीं है। यह तथ्य विभाजन की सभी स्थितियों में दृष्टिगत रखा जाता है और इसे बार-बार कहा नहीं जाएगा।

x^2+4x को $x^2+7x+12$ में से घटाने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(x^2+7x+12)-(x^2+4x)=3x+12$$

अब, $$3x+12=3\times(x+4)$$

अतः, $(x+4)\times(x+3)=x^2+4x+3(x+4)=x^2+7x+12$

तथा, $(x^2+7x+12)\div(x+4)=x+3$

हम धनपूर्णांकों के लिए लम्बी विभाजन विधि की ही भाँति अपने परिकलनों को निम्न प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं :

$$\begin{array}{r}
x+4)\,x^2+7x+12\,(x+3 \\
x^2+4x \quad\quad \\
-\quad - \quad\quad \\
\hline
3x+12 \\
3x+12 \\
-\quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

संख्याओं की स्थिति की भाँति, हम $x^2+7x+12$ को **भाज्य (dividend)**, $x+4$ को **भाजक (divisor)** तथा $x+3$ को **भागफल (quotient)** कहते हैं ।

विभाजन प्रक्रिया के उपर्युक्त दर्शाए गए रूप में, हम भाज्य को कोष्ठकों) और (के अंदर लिखते हैं तथा भाजक को बाहर बाईं ओर लिखते हैं । पहला गुणज x बाहर दाईं ओर लिखा जाता है । फिर $x+4$ और x का गुणनफल x^2+4x पदों x^2+7x के नीचे लिखा जाता है । फिर इसे भाज्य में से घटाया जाता है जिससे शेषफल $3x+12$ प्राप्त होता है । तदुपरान्त, दूसरा गुणज $+3$ बाहर दाईं और लिखा जाता है तथा $(x+4)$ और $+3$ का गुणनफल अर्थात् $3x+12$, $3x+12$ के नीचे लिखा जाता है । व्यवकलन का तब परिणाम शून्य है और भागफल $x+3$ है ।

यह दर्शाने के लिए कि भाजक के भागफल के उत्तरोत्तर (successive) पदों के साथ गुणनफलों को भाज्य तथा उत्तरोत्तर शेषफलों में से घटाया जाना है, हम गुणनफलों के पदों के चिन्ह बदल देते हैं और इन बदले हुए चिन्हों

को मूल चिन्हों के नीचे लिख देते हैं। जब पर्याप्त अभ्यास हो जाए, तो यह चरण आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 12 : बहुपद $y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6$ को y^3-y^2+2 से भाग दीजिए।

हल : विभाजन प्रक्रिया को निम्न प्रकार भी प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2-y+3 \\
y^3-y^2+2 & y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6 \\
 & y^5-y^4 \qquad\quad +2y^2 \\
 & - \quad + \qquad\quad - \\
\hline
 & -y^4+4y^3-3y^2-2y+6 \\
 & -y^4+y^3 \qquad\quad -2y \\
 & + \quad - \qquad\quad + \\
\hline
 & 3y^3-3y^2+6 \\
 & 3y^3-3y^2+6 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

इस प्रकार, भागफल y^2-y+3 है। अर्थात्,

$$(y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6)\div(y^3-y^2+2)=y^2-y+3$$

पिछले दो उदाहरणों में हम बिना किसी शेषफल के पूर्णतया विभाजन करने में समर्थ हो गए थे। ऐसी स्थितियों में हम कहते हैं कि **भाज्य, भाजक से पूर्णतया विभाजित है या केवल यह कि भाज्य, भाजक से विभाज्य (divisible) है।** परन्तु यह स्थिति सदैव ही नहीं रहती।

उदाहरण 13 : $4x^2+3x+4$ को $2x+1$ से भाग दीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
2x+1 & 4x^2+3x+4 \; (2x+\frac{1}{2} \\
 & 4x^2+2x \\
 & - \quad - \\
\hline
 & x+4 \\
 & x+\frac{1}{2} \\
 & - \quad - \\
\hline
 & \frac{7}{2}
\end{array}
$$

हम देखते हैं कि इस उदाहरण में विभाजन पूर्ण नहीं है तथा यहाँ एक **शेषफल** $\frac{7}{2}$ रहता है। यह शेषफल घात 0 का है तथा हम आगे और विभाजन नहीं कर सकते। हम कहते हैं कि **भागफल** $2x+\frac{1}{2}$ है तथा **शेषफल** $\frac{7}{2}$ है।

उदाहरण 14 : जब $5y^3+7y-6$ को y^2+y+1 से भाग दिया जाता है तो भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} y^2+y+1) & 5y^3 \qquad +7y-6\,(5y-5 \\ & 5y^3+5y^2+5y \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & -5y^2+2y-6 \\ & -5y^2-5y-5 \\ & + \quad + \quad + \\ \hline & 7y-1 \end{array}$$

इस प्रकार, भागफल $5y-5$ है तथा शेषफल $7y-1$ है।

टिप्पणी 1 : शेषफल की घात भाजक की घात से सदैव छोटी होती है।

टिप्पणी 2 : भाज्य और भाजक दोनों ही x की घातों के अवरोही क्रम में लिखे जाते हैं। व्यापक रूप में, हम विभाजन के बारे में तभी सोचते हैं जबकि भाज्य की घात भाजक की घात से बड़ी या उसके बराबर होती है।

प्रश्नावली 3.7

1. बहुपद x^2-x-42 को $x-7$ से भाग दीजिए।

2. क्या बहुपद $4y^2-13y-12$ बहुपद $4y-3$ से विभाज्य है ?

3. दर्शाए गए विभाजन कीजिए :

(i) $(y^3+1)\div(y+1)$

(ii) $(y^3+1)\div(y^2-y+1)$

4. $15x^4-16x^3+8x-17$ को $3x^2+x+1$ से भाग दीजिए और भागफल तथा शेषफल लिखिए।

5. बहुंपद $2x^4+8x^3+7x^2+4x+3$ को x^2+4x+3 से भाग दीजिए।

3.5 परिमेय व्यंजक

हमारे सम्मुख $\frac{x+1}{2x-3}$ के प्रकार के बीजीय व्यंजकों के उदाहरण पहले ही आ चुके हैं। एक बहुपद के विपरीत व्यंजक $\frac{x+1}{2x-3}$, बहुपद $x+1$ भाग बहुपद $2x-3$ है। इस प्रकार के बीजीय व्यंजक, जो दो बहुपदों के भागफल होते हैं, **परिमेय व्यंजक (rational expressions) कहलाते हैं।** ये बहुपदों से उसी प्रकार बनाए जाते हैं जिस प्रकार पूर्णांकों से परिमेय संख्याएँ बनाई जाती हैं। आइए परिमेय व्यंजकों के कुछ और उदाहरण लें।

बीजीय व्यंजक

$$\frac{2x-1}{3x+1},\ \frac{x^2-x+1}{x^3-1},\ \frac{2y+3y^2-1}{4-y+y^2}$$

में से सभी परिमेय व्यंजक हैं। पहले दो, चर x में परिमेय व्यंजक हैं जबकि अंतिम चर y में एक परिमेय व्यंजक है।

टिप्पणी : बहुपद, परिमेय व्यंजकों की विशेष स्थितियाँ हैं जिस प्रकार पूर्णांक, परिमेय संख्याओं की विशेष स्थितियाँ हैं।

प्रश्नावली 3.8

1. निम्न बीजीय व्यंजकों में से कौन-कौन बहुपद हैं तथा कौन-कौन परिमेय व्यंजक हैं परन्तु बहुपद नहीं हैं ?

(i) $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ (ii) $y^2+\sqrt{2}\,y-1$

(iii) $\dfrac{x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}$

(iv) $\frac{1}{3}z^2+\frac{\sqrt{2}}{5}z$ (v) $\frac{14x^2+1}{3x-1}$

2. x में एक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसका अंश घात 4 का एक बहुपद हो तथा हर घात 3 का एक बहुपद हो।

3. परिमेय व्यंजक $\dfrac{3x^2+4x^3-2x+\frac{1}{2}}{5x-\frac{3}{7}x^2+14x^3-1}$ के अंश और हर का अंतर ज्ञात कीजिए।

4. एक परिमेय व्यंजक बनाइए जिसका अंश उसके हर से पाँच गुना हो तथा प्रत्येक घात 3 का एक बहुपद हो।

3.6 परिमेय व्यंजकों का योग

आइए अब परिमेय व्यंजकों के योग का अध्ययन करें। क्या आपको याद है कि परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा जाता है ? यदि $\frac{a}{b}$ और

$\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

परिमेय व्यंजकों के योग को भी इसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

आइए $\frac{x-1}{x+2}$ और $\frac{2x+1}{3x-2}$ को जोड़ें।

यदि हम परिमेय संख्याओं वाले नियम के अनुसार ही जोड़ें, तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{2x+1}{3x-2}=\frac{(x-1)\times(3x-2)+(x+2)\times(2x+1)}{(x+2)\times(3x-2)}$$

$$=\frac{3x^2-2x-3x+2+2x^2+x+4x+2}{3x^2-2x+6x-4}$$

$$=\frac{5x^2+4}{3x^2+4x-4}$$

परिमेय व्यंजकों के योग के लिए नियम :

यदि $\frac{A}{B}$ और $\frac{C}{D}$ चर x में दो परिमेय व्यंजक हैं जहाँ A, B, C, D चर x में बहुपद हैं तथा $B\neq0$, $D\neq0$ है, तो $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\times D+B\times C}{B\times D}$ होता है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 15 : परिमेय व्यंजकों $\frac{5x-1}{5x+1}$ और $\frac{2x+1}{1-2x}$ को जोड़िए।

हल :

$$\frac{5x-1}{5x+1}+\frac{2x+1}{1-2x}$$

$$=\frac{(5x-1)\times(1-2x)+(5x+1)\times(2x+1)}{(5x+1)\times(1-2x)}$$

$$= \frac{5x-10x^2-1+2x+10x^2+5x+2x+1}{5x-10x^2+1-2x}$$

$$= \frac{14x}{-10x^2+3x+1}$$

उदाहरण 16 : सरल कीजिए :

$$\frac{2y+y^2-1}{1-y} + \frac{2y-3y^2}{1+y}$$

हल : $\frac{2y+y^2-1}{1-y} + \frac{2y-3y^2}{1+y}$

$$= \frac{(2y+y^2-1) \times (1+y) + (1-y) \times (2y-3y^2)}{(1-y) \times (1+y)}$$

$$= \frac{2y+2y^2+y^2+y^3-1-y+2y-3y^2-2y^2+3y^3}{1+y-y-y^2}$$

$$= \frac{4y^3-2y^2+3y-1}{1-y^2}$$

प्रश्नावली 3.9

1. परिमेय व्यंजकों के निम्न युग्मों को जोड़िए :

(i) $\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}, \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$

(ii) $\frac{2x+x^2-1}{x^2+1}, \frac{x-x^2+1}{x+2}$

(iii) $\frac{\sqrt{2}\,x+1}{1-\sqrt{2}\,x}, \frac{1+\sqrt{3}\,x}{1-\sqrt{3}\,x}$

2. सरल कीजिए :

$$\frac{y-2y^2+1}{y+2y^2+1} + \frac{\frac{1}{2}+y}{\frac{1}{2}-y}$$

3. सरल कीजिए :

(i) $(2x^2+1) + \frac{1}{x-1}$

(ii) $(1-y) + \frac{1}{1-y}$

3.7 परिमेय व्यंजकों का व्यवकलन

क्या आपको परिमेय संख्याओं के व्यवकलन के नियम के बारे में याद है ? यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{a}{b}$ में से $\frac{c}{d}$ को घटाना इसके समान है कि $\frac{a}{b}$ में $\frac{c}{d}$ का ऋणात्मक [या योज्य प्रतिलोम (additive inverse) जोड़ना । इस प्रकार,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{a}{b}+\frac{(-c)}{d}$$

अब एक परिमेय व्यंजक के योज्य प्रतिलोम से हमारा क्या तात्पर्य होना चाहिए ? स्पष्ट है, इसको वह परिमेय व्यंजक होना चाहिए जिसे दिए हुए व्यंजक में जोड़ने से 0 प्राप्त हो जाए । उदाहरणार्थ, मान लीजिए हमें परिमेय व्यंजक $\frac{x+1}{x-1}$ दिया है । तब, ऐसा कौन सा व्यंजक है जिसे $\frac{x+1}{x-1}$ में जोड़ने पर 0 प्राप्त होता है ? देखिए कि

$$\frac{x+1}{x-1}+\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{-x-1}{x-1}$$

$$=\frac{(x+1)\times(x-1)+(x-1)\times(-x-1)}{(x-1)\times(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + x - 1 - x^2 - x + x + 1}{(x-1)\times(x-1)}$$

$$= \frac{0}{(x-1)\times(x-1)}$$

$$= 0$$

अतः, $\frac{x+1}{x-1}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-x-1}{x-1}$ है। दूसरे शब्दों में, यह ऐसा परिमेय व्यंजक है जिसमें अंश $\frac{x+1}{x-1}$ के अंश का ऋणात्मक है तथा हर वही है जो $\frac{x+1}{x-1}$ का है। व्यापक रूप में,

यदि $\frac{P}{Q}$ चर x में एक परिमेय व्यंजक है, तो परिमेय व्यंजक $\frac{-P}{Q}$, $\frac{P}{Q}$ का योज्य प्रतिलोम होता है।

अब हम एक परिमेय व्यंजक को दूसरे में से घटाने का नियम दे रहे हैं।

यदि $\frac{A}{B}$ और $\frac{C}{D}$ चर x में परिमेय व्यंजक हैं, तो

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$$

$$= \frac{A\times D + B\times(-C)}{B\times D} = \frac{A\times D - B\times C}{B\times D}$$

उदाहरण 17 : परिमेय व्यंजक $\frac{x+1}{x-1}$ को $\frac{x-1}{x+1}$ में से घटाइए।

हल : $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$

$$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{-(x+1)}{x-1}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{-x-1}{x-1}$$

$$=\frac{(x-1)\times(x-1)+(x+1)\times(-x-1)}{(x+1)\times(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-x-x+1-x^2-x-x-1}{x^2-x+x-1}$$

$$=\frac{-4x}{x^2-1}$$

उदाहरण 18 : सरल कीजिए :

$$\frac{4y-y^2+1}{1-y}-\frac{2y+y^2-1}{2+y}$$

हल : $\frac{4y-y^2+1}{1-y}-\frac{2y+y^2-1}{2+y}$

$$=\frac{(4y-y^2+1)\times(2+y)-(1-y)\times(2y+y^2-1)}{(1-y)\times(2+y)}$$

$$=\frac{8y+4y^2-2y^2-y^3+2+y-(2y+y^2-1-2y^2-y^3+y)}{2+y-2y-y^2}$$

$$=\frac{8y+4y^2-2y^2-y^3+2+y-2y-y^2+1+2y^2+y^3-y}{2+y-2y-y^2}$$

$$=\frac{3y^2+6y+3}{2-y-y^2}$$

प्रश्नावली 3.10

1. परिमेय व्यंजक $\frac{2x+3}{2x^2+x+1}$ को परिमेय व्यंजक $\frac{1-2x}{1+2x}$ में से घटाइए।

2. सरल कीजिए :

$$(4x-x^2+2)-\frac{1+x}{2+3x}$$

3. सरल कीजिए :

$$(1+8x)+\frac{8x-1}{1+8x}-\frac{2+2x}{5+2x}$$

3.8 परिमेय व्यंजकों का गुणन

हम दो परिमेय संख्याओं का किस प्रकार गुणा करते हैं ? आपको याद होगा कि यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तो हम उनके गुणनफल को $\frac{a\times c}{b\times d}$ के रूप में परिभाषित करते हैं और निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

हम चर x में दो परिमेय व्यंजकों $\frac{A}{B}$ और $\frac{C}{D}$ के गुणनफल को भी इसी प्रकार परिभाषित करते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$$

उदाहरण 19 : परिमेय व्यंजकों $\frac{x+1}{x-1}$ और $\frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}$ का गुणा कीजिए।

हल : $$\frac{x+1}{x-1}\times\frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}=\frac{(x+1)\times(2x-1)}{(x-1)\times\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 2x - 1}{x^2 - \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

उदाहरण 20 : $\frac{y^2 - y + 2}{y - 3}$ को $\frac{y+4}{y^2 + y - 1}$ से गुणा कीजिए।

हल :

$$\frac{y^2 - y + 2}{y - 3} \times \frac{y+4}{y^2 + y - 1}$$

$$= \frac{(y^2 - y + 2) \times (y+4)}{(y-3) \times (y^2 + y - 1)}$$

$$= \frac{y^3 + 4y^2 - y^2 - 4y + 2y + 8}{y^3 + y^2 - y - 3y^2 - 3y + 3}$$

$$= \frac{y^3 + 3y^2 - 2y + 8}{y^3 - 2y^2 - 4y + 3}$$

प्रश्नावली 3.11

1. निम्न परिमेय व्यंजकों का गुणा कीजिए :

(i) $\frac{5x+3}{5x-1}$ और $\frac{2x-1}{x+1}$

(ii) $\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1}$ और $\frac{2x+4}{3}$

(iii) $\frac{3y + y^2}{18y - 1}$ और $\frac{5}{4y+1}$

(iv) $8x + 7x^2 + 6$ और $\frac{1}{x+1}$

2. सरल कीजिए :

$$(x+5)+\frac{4x+7}{x-1}\times\frac{7-4x^2}{x+4}$$

3. सरल कीजिए :

$$(8y-y^2+6)-(y^2+6-7y)\times\frac{y-5}{6y+5}$$

3.9 परिमेय व्यंजक का व्युत्क्रम

पिछले अनुच्छेद में हमने सीखा है कि एक चर x में दो परिमेय व्यंजकों का किस प्रकार गुणा किया जाता है।

$\frac{x-1}{2x+1}\times\frac{2x+1}{x-1}$ क्या है ?

हमारे गुणन के नियम अनुसार, गुणनफल निम्न है :

$$\frac{(x-1)\times(2x+1)}{(2x+1)\times(x-1)}$$

यहाँ अंश और हर में बिना गुणा किए भी हम देख सकते हैं कि अंश और हर समान हैं। (क्यों ?) क्या आपको याद है कि $\frac{5}{5}$ या $\frac{7}{7}$ या $\frac{3}{3}$ क्या हैं? ये सब 1 के बराबर हैं। यह परिमेय व्यंजकों के लिए भी सत्य है। **यदि एक परिमेय व्यंजक के अंश और हर दोनों एक ही बहुपद के बराबर हैं, तो हम उस परिमेय व्यंजक को 1 के बराबर मानते हैं।**

इस प्रकार,

$$\frac{x-1}{2x+1}\times\frac{2x+1}{x-1}=1$$

आपको याद होगा कि, परिमेय संख्याओं में, हम $\frac{b}{a}$ को $\frac{a}{b}$ का **व्युत्क्रम** **(reciprocal)** कहते हैं। यहाँ भी हम कहते हैं कि $\frac{2x+1}{x-1}$, $\frac{x-1}{2x+1}$ **का व्युत्क्रम है।**

इसी प्रकार,

$$\frac{x^2+x+1}{2x+3}, \frac{2x+3}{x^2+x+1} \text{ का व्युत्क्रम है ।}$$

$$\frac{5y^2-2y+7}{3y^2+4y+9}, \frac{3y^2+4y+9}{5y^2-2y+7} \text{ का व्युत्क्रम है ।}$$

प्रश्नावली 3.12

1. निम्न परिमेय व्यंजकों के व्युत्क्रम लिखिए :

(i) $\frac{0.5x+0.7}{3x+0.1}$ (ii) $\frac{8x^2+7x+0.1}{7x^2-2x+0.3}$

(iii) $\frac{20y-8y^2+5}{3y+0.8}$

2. परिमेय व्यंजक $\frac{x^2+20x+10}{x+1}$ और उसके व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए ।

3. चर x में एक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसके व्युत्क्रम के अंश की घात 2 हो तथा हर की घात 3 हो ।

4. निम्न का व्युत्क्रम क्या है ?

(i) $2x+3$ (ii) $\frac{1}{x+1}$

3.10 परिमेय व्यंजकों का विभाजन

आपको याद होगा कि यदि हम एक परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ को दूसरी परि-

मेय संख्या $\frac{c}{d}$ से भाग देना चाहते हैं तो हम $\frac{a}{b}$ का $\frac{c}{d}$ के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं। अर्थात्,

$$\text{i.e., } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

हम ठीक इसी प्रकार एक परिमेय व्यंजक को दूसरे परिमेय व्यंजक से भाग देते हैं।

यदि $\frac{A}{B}$ और $\frac{C}{D}$ चर x में दो परिमेय व्यंजक हैं, तो

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

उदाहरण 21 : परिमेय व्यंजक $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ को $\frac{x^2-1}{x+2}$ से भाग दीजिए।

हल :

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} \div \frac{x^2-1}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^2+x+1) \times (x+2)}{(x-1) \times (x^2-1)}$$

$$= \frac{x^3+x^2+x+2x^2+2x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

प्रश्नावली 3.13

1. परिमेय व्यंजक $\frac{2x+1}{x-1}$ को $\frac{x-1}{x+1}$ से भाग दीजिए।

2. सरल कीजिए :

$$\frac{3y+5}{5-2y} \div \frac{y+1}{y-1}$$

3. सरल कीजिए :

(i) $\left\{\frac{2x^2+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right\}\div\frac{x^2-1}{2x}$

(ii) $\left\{(y+y^2+2)\times(3y-1)-\frac{1}{4}\right\}\div\frac{1}{y}$

4. मान लीजिए $P=\frac{x}{x+1}$ तथा $Q=\frac{1}{x}$ है।

ज्ञात कीजिए।

(i) $P+Q$ (ii) $P-Q$ (iii) $P\times Q$ (iv) $P\div Q$

मुख्य संकल्पनाएँ

वास्तविक गुणांकों वाले बहुपद	परिमेय व्यंजक
बहुपदों का योग और व्यवकलन	परिमेय व्यंजकों का योग और व्यवकलन
बहुपदों का गुणन	परिमेय व्यंजकों का गुणन और विभाजन
बहुपदों का विभाजन	परिमेय व्यंजक का व्युत्क्रम

तथा दूसरे पद के गुणा का तिगुना, धन पहले पद तथा दूसरे पद के वर्ग के गुणा का तिगुना, धन दूसरे पद के घन के बराबर होता है।

उदाहरण 1 : $(x+1)^3$ को प्रसारित कीजिए।

हल : $$(x+1)^3 = x^3+3x^2\times 1+3x\times 1^2+1^3$$
$$= x^3+3x^2+3x+1$$

उदाहरण 2 : $(2x+3y)^3$ को प्रसारित कीजिए।

हल : $$(2x+3y)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$$
$$= 8x^3+3\times 4x^2\times 3y+3\times 2x\times 9y^2+27y^3$$
$$= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

उदाहरण 3 : $(101)^3$ को परिकलित कीजिए।

हल : $$(101)^3 = (100+1)^3$$
$$= 100^3+3\times 100^2\times 1+3\times 100\times 1^2+1^3$$
$$= 1000000+30000+300+1$$
$$= 1030301$$

प्रश्नावली 4.2

निम्न व्यंजकों के घन परिकलित कीजिए :

1. $a+b$
2. $a+2b$
3. $x+2$
4. $x+2y$
5. $6x+7y$
6. $x+\frac{1}{\sqrt{3}}$
7. $3x+1$

निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

8. 102^3
9. 205^3
10. 1001^3
11. $(10.5)^3$

4.13 दो एकपदियों के अन्तर का घन

ऊपर हमने दो एकपदियों के योग का घन परिकलित किया है। दो एकपदियों के अंतर के घन के बारे में आप क्या सोचते हैं ?
हम जानते हैं कि

$$(x-y)^2=(x-y)\times(x-y)=x^2-2xy+y^2$$

अत: हम $x-y$ का घन सरलता से परिकलित कर सकते हैं।

$$\begin{aligned}(x-y)^3&=(x-y)\times(x-y)^2\\&=(x-y)\times(x^2-2xy+y^2)\\&=x^3-2x^2y+xy^2-yx^2+2xy^2-y^3\\&=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\end{aligned}$$

इससे हमें दो एकपदियों के अंतर का घन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र प्राप्त होता है :

F II. $\mathbf{(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$

यह देखा जा सकता है कि $(x-y)^3$ के प्रसार (expansion) में दाईं ओर के पद वही हैं जो $(x+y)^3$ के प्रसार में हैं। परन्तु इसमें पदों के चिह्न एक एक पद छोड़ते हुए धनात्मक और ऋणात्मक हैं।

उदाहरण 4 : $(2a-3b)^3$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(2a-3b)^3$

$$\begin{aligned}&=(2a)^3-3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2-(3b)^3\\&=8a^3-3\times4a^2\times3b+3\times2a\times9b^2-27b^3\\&=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3\end{aligned}$$

उदाहरण 5 : 99^3 को परिकलित कीजिए।

हल : $99^3=(100-1)^3$

$$\begin{aligned}&=100^3-3\times100^2\times1+3\times100\times1^2-1^3\\&=1000000-30000+300-1\\&=1000300-30001\\&=970299\end{aligned}$$

प्रश्नावली 4.3

निम्न व्यंजकों के घन परिकलित कीजिए :

1. $a-b$ 2. $2a-5b$ 3. $8x-1$

4. $1-\frac{7x}{10}$ 5. $2x-3z$

निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

6. $(97)^3$ 7. $(999)^3$ 8. $(9.9)^3$

4.2 कुछ विशेष गुणनफल

कभी-कभी दो बहुपदों का गुणनफल अति सरल प्रकार का आ जाता है। इस प्रकार का एक सुन्दर गुणनफल हमने कक्षा VII में देखा था जो निम्न है :

$$(x+y)\times(x-y)=x^2-y^2$$

जब हम बीजीय व्यंजकों के साथ कार्य कर रहे होते हैं तो यह गुणनफल प्रायः उपयोगी रहता है।

आइए निम्न गुणनफल पर विचार करें :

$$(x+y)\times(x^2-xy+y^2)$$

जब हम इनका गुणा करते हैं तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(x+y)\times(x^2-xy+y^2)$$
$$=x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3$$
$$=x^3+y^3$$

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि

F III. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

ध्यान दीजिए कि दक्षिण पक्ष (right hand side) दो घनों का योग है।

उदाहरण 6 : $(x+1)\ (x^2-x+1)$ ज्ञात कीजिए।

हल : यदि FIII में हम $y=1$ लें तो हमें तुरन्त प्राप्त होता है कि

$$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$$

उदाहरण 7 : $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

हल : ध्यान दीजिए कि द्वितीय गुणनखंड

$$4a^2-6ab+9b^2$$
$$=(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2$$

गुणनफल $(2a+3b)\{(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2\}$ की FIII के वाम पक्ष (left hand side) से तुलना करने पर, हम देखते हैं कि हम यहाँ $x=2a$ तथा $y=3b$ लेकर FIII का उपयोग कर सकते हैं। अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$
$$=(2a)^3+(3b)^3$$
$$=8a^3+27b^3$$

प्रश्नावली 4.4

निम्न गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

1. $(a+2)(a^2-2a+4)$
2. $(1-a+a^2)(1+a)$
3. $(0.7x+0.9y)(0.49x^2-0.63xy+0.81y^2)$
4. $(2x+7)\{(2x)^2-7\times 2x+49\}$
5. $\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3xy}{8}+\frac{9y^2}{16}\right)$

यदि हम FIII में y के स्थान पर $-y$ रखें तो हमें निम्न प्रा[illegible]

FIV. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

हम इसकी जाँच सीधा गुणा करके भी निम्न प्र[illegible]

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=x^3+x^2y+xy^2-yx^2\ [illegible]$$
$$=x^3-y^3$$

उदाहरण 8 : $(x-1)(x^2+x+1)$ ज्ञात कीजिए।

हल : FIV में $y=1$ लेकर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1^3$$
$$=x^3-1$$

उदाहरण 9 : $(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$ ज्ञात कीजिए।

हल : द्वितीय गुणनखंड

$$4a^2+10ab+25b^2=(2a)^2+(2a)(5b)+(5b)^2$$

उपर्युक्त को दृष्टिगत रखते हुए और फिर गुणनफल

$$(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$$

की FIV के वाम पक्ष से तुलना करने पर हम देखते हैं कि $x=2a$ और $y=5b$ लेकर इस सूत्र का उपयोग किया जा सकता है।

FIV का उपयोग करने पर,

$$(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)=(2a)^3-(5b)^3$$
$$=8a^3-125b^3$$

प्रश्नावली 4.5

निम्न गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

1. $(1-x)(1+x+x^2)$
2. $(25x^2+15xy+9y^2)(5x-3y)$
3. $(2a-1)(1+2a+4a^2)$
4. $(1-2a)(4a^2+1+2a)$
5. $\left(\frac{1}{49}y^2+\frac{3}{7}xy+9x^2\right)\left(3x-\frac{1}{7}y\right)$

4.3 कक्षा VII में की हुई गुणनखंडन तकनीकों का पुनरावलोकन

एक बहुपद को उससे छोटी घातों के दो(या अधिक) बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने को **गुणनखंडन (factorization)** कहते हैं। कक्षा VII

में, हम परिमेय गुणाकों वाले द्विघात व्यंजकों के गुणनखंड करने की चार विधियाँ पढ़ चुके हैं। जब गुणांक वास्तविक संख्याएँ हो जाते हैं तब भी ये विधियाँ मान्य रहती हैं। आइए इन विधियों का पुनरावलोकन करें।

I. यदि किसी बहुपद के सभी पदों में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है तो हम उस बहुपद को ऐसे दो गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिनमें से एक वह उभयनिष्ठ गुणनखंड है :

उदाहरण 10 : $15x^2+3x$ एक बहुपद है जिसमें प्रत्येक पद $3x$ का एक गुणज है। हम लिख सकते हैं कि

$$(15x^2+3x)=3x\times(5x+1)$$

$$\textbf{II.}\ \mathbf{x^2-y^2=(x+y)(x-y)}$$

अर्थात्, **दो चरों के वर्गों का अंतर उन चरों के योग और अंतर के गुणनफल के समान होता है।**

उदाहरण 11 : $49x^2-25y^2=(7x)^2-(5y)^2$
$$=(7x+5y)\ (7x-5y)$$

$$\textbf{III.}\ \mathbf{x^2+2xy+y^2=(x+y)^2}$$

उदाहरण 12 : $4x^2+20xy+25y^2=(2x)^2+2(2x)(5y)+(5y)^2$
$$=(2x+5y)^2$$

$$\textbf{IV.}\ \mathbf{x^2-2xy+y^2=(x-y)^2}$$

उदाहरण 13 : $x^2-2\sqrt{3}\,xy+3y^2$
$$=(x)^2-2(x)(\sqrt{3}\,y)+(\sqrt{3}\,y)^2$$
$$=(x-\sqrt{3}\,y)^2$$

प्रश्नावली 4.6

गुणनखंड कीजिए :

1. $\sqrt{2}\,x+2x^2$
2. $7y+21y^2-49y^3$
3. x^2-2
4. $7y^2-3z^2$

5. $y^2+2\times 2y+4$

6. $0.01x^2+0.2xy+y^2$

7. $x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

8. $2x^2-2\sqrt{2}\,xy+y^2$

4.4 द्वितीय घात के त्रिपद का गुणनखंडन

एक चर x में एक द्वितीय घात का त्रिपद

$$ax^2+bx+c$$

के रूप का एक बहुपद होता है जहाँ a,b,c (ज्ञात) वास्तविक संख्याएँ हैं। यह एक द्विघात व्यंजक (quadratic expression) भी कहलाता है। कुछ सरल स्थितियों में ऐसे बहुपदों के गुणनखंडन की विधि देने के लिए, आइए निम्न गुणनफल पर विचार करें :

$$(x+a)\,(x+b)$$

गुणा करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

अतः, $x^2+(a+b)\,x+ab$ के प्रकार के बहुपद को

$$(x+a)\,(x+b)$$

के रूप में गुणनखंड किए जा सकते हैं।

F V. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)\,(x+b)$

ध्यान दीजिये कि यदि x^2+Ax+B कोई स्वेच्छ द्विघात व्यंजक है जहाँ x^2 का गुणांक 1 है, तो वह $x^2+(a+b)x+ab$ के रूप का केवल तब होगा जब हम दो वास्तविक संख्याएँ a और b ऐसी ज्ञात कर सकते हों कि उनका योग a+b, A हो तथा उनका गुणनफल ab, B हो।

उदाहरण 14 : $x^2+7x+12$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यदि हम ऐसी दो संख्याएँ सोच सकते हैं कि उनका योग 7 हो और गुणनफल 12 हो तो F V का प्रयोग किया जा सकता है। अब 12 के

$1\times12, 2\times6, 3\times4$ के रूप में गुणनखंड किये जा सकते हैं। इनमें से गुणनखंड 3 और 4 ऐसे हैं कि उनका योग 7 है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$x^2+7x+12=x^2+(4+3)x+4\times3$$

और इसलिए $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$

उदाहरण 15 : x^2+2x-8 के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें ऐसी दो संख्याएँ सोचनी हैं जिनका गुणनफल -8 है तथा योग 2 है। -8 के गुणनखंड निम्न हैं :

$$(-1)\times8,\ (-2)\times4,\ 1\times(-8), \text{ और } 2\times(-4).$$

स्पष्ट है कि गुणनखंडों -2 और 4 का योग $+2$ है।

अतः, $x^2+2x-8=x^2+(4-2)x+4\times(-2)$

$$=x^2+4x-2x-2\times4$$

$$=x(x+4)-2(x+4)$$

$$=(x+4)(x-2)$$

प्रश्नावली 4.7

गुणनखंड कीजिए :

1. x^2+2x+1
2. $x^2-10x+25$
3. x^2+6x+5
4. y^2-2y-3
5. z^2-5z+6
6. $y^2+\frac{7}{12}y+\frac{1}{12}$
7. x^2+x-20
8. $x^2+3ax+2a^2$
9. $x^2+2kx-3k^2$
10. $x^2-px-6p^2$

4.5 दो घनों के योग और अंतर का गुणनखंडन

अनुच्छेद 4.2 में हम पढ़ चुके हैं कि

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$

दूसरे शब्दों में, यदि हम दो घनों के योग x^3+y^3 के गुणनखंड करना चाहते हों, तो हम कह सकते हैं कि $x+y$ और x^2-xy+y^2, x^3+y^3 के गुणनखंड हैं। इस प्रकार,

$$\textbf{F VI.}\quad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

मान लीजिए हम बहुपद x^3+1 के गुणनखंड करना चाहते हैं।

हम देखते हैं कि $x^3+1=x^3+1^3$

अतः, हम FVI का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं।

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

क्या आप बहुपद x^2-x+1 के गुणनखंड कर सकते हैं ? प्रयत्न कीजिए।

टिप्पणी : यदि कोई द्विघात व्यंजक x^2+Ax+B दिया हुआ है, तो यह सदैव संभव नहीं होता कि हम ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ ज्ञात कर लें जिनका योग A और गुणनफल B हो। अतः हम FV का प्रयोग सदैव नहीं कर सकते।

उदाहरण 16 : $8a^3+27b^3$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$$

अर्थात् दिया हुआ व्यंजक दो घनों का एकयोग है। हम FVI का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं:

$$8a^3+27b^3=(2a+3b)\{(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2\}$$
$$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$

उदाहरण 17 : $2\sqrt{2}\,x^3+125$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$2\sqrt{2}\,x^3+125=(\sqrt{2}\,x)^3+(5)^3$$

अर्थात् $2\sqrt{2}\,x^3+125=(\sqrt{2}\,x+5)\{(\sqrt{2}\,x)^2-(\sqrt{2}\,x)(5)+(5)^2\}$

$$=(\sqrt{2}\,x+5)(2x^2-5\sqrt{2}\,x+25)$$

अनुच्छेद 4.2 में हमने यह भी पढ़ा था कि

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

अत:, जब भी कोई व्यंजक दो घनों के अंतर x^3-y^3 के रूप का हो तो हम उसके $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ के रूप में गुणनखंड कर सकते हैं।

F VII $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

उदाहरण 18 : $1-a^3$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : $1-a^3=1^3-a^3$ है, जो दो घनों का अंतर है। FVII का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$1-a^3=1^3-a^3$$
$$=(1-a)(1+a+a^2)$$

उदाहरण 19 : $125x^3-8y^3$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते है कि

$125x^3-8y^3=(5x)^3-(2y)^3$ दो घनों का अंतर है। अतः हम FVII का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न प्राप्त कर सकते हैं :

$$125x^3-8y^3=(5x)^3-(2y)^3$$
$$=(5x-2y)\{(5x)^2+(5x)(2y)+(2y)^2\}$$
$$=(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$$

4.6 सर्वसमिकाएँ और प्रतिबन्धित सर्वसमिकाएँ

आइए निम्न सूत्र पर विचार करें :

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \quad (1)$$

आइए x और y को कोई भी मान, उदाहरणार्थ

$x=1,\ y=1$, दें। तब,

(1) का वाम पक्ष $=(1+1)^2=4$

(1) का दक्षिण पक्ष $=1^2+2\times1\times1+1^2=4$

इस प्रकार, दोनों पक्ष समान हैं। आइए x और y के मानों के कुछ और युग्म, उदाहरणार्थ $x=1, y=2$; $x=2, y=1$; $x=3, y=-5$; इत्यादि लेकर देखें। प्रत्येक स्थिति में हमें ज्ञात होता है कि वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष के मान समान हैं। आप मानों के कोई और युग्म लेकर देख सकते हैं। इस प्रकार, हमें ज्ञात होता है कि (1), x और y के सभी मानों से संतुष्ट हो जाती है। ऐसी समीकरण को हम एक **सर्वसमिका (identity)** कहते हैं। इस प्रकार,

एक सर्वसमिका कितने भी अज्ञातों (unknowns) में एक ऐसी समीकरण है जो अज्ञातों के सभी मानों के लिए सत्य है।

हम दो अज्ञातों में सर्वसमिकाओं के अनेक उदाहरण देख चुके हैं । सूत्रों FI से FIV में सभी समीकरण सर्वसमिकाएँ हैं ।

आइए अब निम्न गुणनफल पर विचार करें :

$$\begin{aligned}(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\\ =x^3+xy^2+xz^2-xyz-x^2z-x^2y\\ +yx^2+y^3+yz^2-y^2z-yzx-xy^2\\ +zx^2+zy^2+z^3-yz^2-z^2x-zxy\\ =x^3+y^3+z^3-3xyz\end{aligned}$$

क्योंकि इस गुणनफल के अन्य सभी पद कट जाते हैं । अतः,

$$(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy) = x^3+y^3+z^3-3xyz \qquad (2)$$

क्योंकि x, y, z के लिए बिना कोई विशेष मान लेते हुए हमें समीकरण (2) प्राप्त हुई है, अतः, चाहे हम x, y, z को कोई भी मान दें, यह समीकरण सदैव सत्य है । इस प्रकार, (2) भी एक सर्वसमिका है ।

अब, आइए कल्पना करें x, y, z के ऐसे मान हैं कि $x+y+z=0$ है । उदाहरणार्थ, $x=1$, $y=2$, $z=-3$ हैं । तब (2) के वाम पक्ष का गुणनखंड $x+y+z$ शून्य है । अर्थात् (2) का वाम पक्ष शून्य है । अतः, (2) का दक्षिण पक्ष भी शून्य होना चाहिए अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

यदि $x+y+z=0$, तो

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0, \qquad (3)$$

अथवा,

$$x^3+y^3+z^3=3xyz \qquad (3')$$

हम देखते हैं कि समीकरण (3) अथवा (3′) x, y, z के सभी मानों के लिए सत्य नहीं है । उदाहरणार्थ यदि हम (3′) में $x=1$, $y=1$, $z=2$ लें तो

वाम पक्ष $=1+1+8=10$ है जबकि दक्षिण पक्ष $=3\times1\times1\times2=6$ है । इस प्रकार, समीकरण (3′) मानों $x=1$, $y=1$, $z=2$ से संतुष्ट नहीं होती ।

समीकरण (3) अथवा (3′), x, y, z के ऐसे मानों के लिए सत्य है जो समीकरण $x+y+z=0$ को संतुष्ट करते हैं । या, दूसरे शब्दों में, जो प्रतिबन्ध $x+y+z=0$ को संतुष्ट करते हैं इसी कारण, (3) अथवा (3′) एक **प्रतिबन्धित सर्वसमिका (conditional identity)** कहलाती है ।

इसी प्रकार, यदि हम (2) में

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$$

लें, तो (2) का वाम पक्ष पुनः 0 है और इसलिए दक्षिण पक्ष भी शून्य है। हमें तब एक दूसरी प्रतिबंन्धित सर्वसमिका प्राप्त होती है। यह निम्न है :

'यदि $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$, तो

$$x^3+y^3+z^3=3xyz\text{'} \quad (4)$$

अज्ञातों के ऐसे मानों का एक उदाहरण $x=1, y=1, z=1$ है।

प्रतिबंधित सर्वसमिका का एक अन्य उदाहरण जो अति सरल है निम्न है :

'यदि $x+y=0$, तो $x^2-y^2=0$' (5)

क्या आप दर्शा सकते हैं कि निम्न भी एक प्रतिबन्धित सर्वसमिका है :

'यदि $x-y=0$, तो $x^2-y^2=0$?' (6)

हम कहते हैं कि

एक प्रतिबन्धित सर्वसमिका दो या उससे अधिक अज्ञातों में एक ऐसी समीकरण होती है जो केवल तभी सत्य है जब अज्ञातों पर कोई प्रतिबन्ध लगा हो।

अब हम प्रतिबन्धित सर्वसमिका (3') के उपयोग पर एक उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 20 : सिद्ध कीजिए कि सभी वास्तविक संख्याओं a, b, c के लिए,

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$$

हल : आइये $b-c=x$, $c-a=y$ तथा $a-b=z$ लिखें।

तब, $x+y+z=b-c+c-a+a-b=0$

अब ऊपर समीकरण (3') से,

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$$
$$=x^3+y^3+z^3 \text{ जहाँ, } x+y+z=0$$
$$=3xyz$$
$$=3(b-c)(c-a)(a-b)$$

प्रश्नावली 4 8

गुणनखंड कीजिए।

1. a^3-1 **2.** $a+a^4$ **3.** $8x^3+343y^3$

4. $\frac{1}{216}a^3+8b^3$ **5.** $\frac{1}{5\sqrt{5}}x^3-2\sqrt{2}y^3$ **6.** $0.001x^3-0.125y^3$

*7. सिद्ध कीजिए कि

$$a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$$
$$=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

मुख्य संकल्पनाएँ

एक द्विपद का घन	द्वितीय घात के त्रिपद का
दो संख्याओं के योग और अंतर का घन	गुणनखंडन
	सर्वसमिका
दो संख्याओं के घनों का योग और अंतर	प्रतिबन्धित सर्वसमिका

विविध प्रश्नावली I

(एककों I, II, III और IV पर)

1. 1 और $\sqrt{2}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
2. $\sqrt{5}$ और $\sqrt{13}$ के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
3. निम्न वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

   (i) $-\sqrt{2}$ (ii) $-\sqrt{10}$

   (iii) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{10}-2$
4. दशमलव के 4 स्थानों तक $(\sqrt{2})^3$ ज्ञात कीजिए।
5. ऐसी दो अपरिमेय संख्याएँ दीजिए जिनका गुणनफल एक परिमेय संख्या है।
6. ऐसी दो अपरिमेय संख्याएँ दीजिए जिनका गुणनफल एक अपरिमेय संख्या है।
7. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या है ?
8. ऐसी दो अपरिमेय संख्या दीजिए जिनका योग एक परिमेय संख्या है।
9. दशमलव के तीन स्थानों तक निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $(\sqrt{5})^5$ (ii) $(125)^{\frac{1}{3}}$

   (iii) $(81)^{-\frac{3}{4}}$ (iv) $2+(625)^{\frac{3}{4}}$
10. निम्न में से प्रत्येक को घातों के ऐसे गुणा या भाग के रूप में व्यक्त कीजिए जिनमें a और b दोनों (धनात्मक मानते हुए) केवल एक ही बार आएँ तथा सभी घातांक धनात्मक हों :

    (i) $\dfrac{5^{-2}a^{-3}b^{-4}}{5^4a^{-5}b^{-6}}$ (ii) $\left(\dfrac{2a^3\,b^{-1}}{a^{-2}}\right)^5$

11. निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं ?

(i) $2^3+2^4=2^7$ (ii) $3^4\times 3^2=3^6$

(iii) $a^5\times a^{-2}=a^{-10}$ (iv) $(a^{-2}\times a^{-4})^2=a^{12}$

12. निम्न में से प्रत्येक में a का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(\sqrt{5})^4\times(\sqrt{5})^6=(\sqrt{5})^{2a}$

(ii) $(\sqrt{2})^3\div(\sqrt{2})^7=(\sqrt{2})^{a-2}$

(iii) $(x^{\frac{3}{2}}-1)\ (x^{\frac{3}{2}}+1)=x^{2a+1}-1$

*(iv) $\sqrt{a\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}$

13. निम्न में से प्रत्येक का मान निकालिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :

(i) $\left[(\sqrt{6})^3\times\sqrt{6}\right]^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $5^{\frac{2}{5}}\times(5^{\frac{6}{5}}\div 5^{\frac{1}{5}})$

14. यदि $25\times(\sqrt{5})^a\times(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$ है, तो a ज्ञात कीजिए ।

15. यदि $\{36\times(\sqrt{6})^4\}\div(\sqrt{6})^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{6})^{2-a}$ है, तो a ज्ञात कीजिए :

16. अभी तक सीखे हुए नियमों का प्रयोग करते हुए, निम्न को सरल कीजिए :

(i) $5+\frac{1}{3}\sqrt{36}$ (ii) $2-\frac{1}{4}\sqrt{48}$

17. यह मानते हुए कि a, b धनात्मक संख्याएँ निरूपित करते हैं, निम्न को सरल कीजिए

(i) $\frac{\sqrt{a^3b^4}}{\sqrt[3]{b^3a^2}}$ (ii) $\{\sqrt[5]{12a^6b^3}\div\sqrt[5]{3a^{-2}b^{-1}}\}^{\frac{5}{2}}$

निम्न को सरल कीजिए :

18. $(\sqrt{3}\,x^2+10x+7\sqrt{3})+(3\sqrt{3}\,x^2+4x-2\sqrt{3})$

19. $(\sqrt{7}\,x^3+5x-3\sqrt{3})+(2\sqrt{7}\,x^3+x^2-2\sqrt{3})-(3\sqrt{7}\,x^3+x)$

दर्शाई गई संक्रियाएँ कीजिए :

20. $(2x+\sqrt{3})\times\left(5x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

21. $(1-\sqrt{2}\,x)\times(x^2+2\sqrt{2}\,x-1)+x^2+\sqrt{2}\,x+2$

22. $(x+\sqrt{2}) \times \sqrt{7}\ x \times (1-x)$
23. $(x^3+3x^2-5) \div (x+2)$
24. $(3x^5-2x^4+x^2-2) \div (x^2+x+1)$

निम्न को सरल कीजिए :

25. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$ 26. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

27. $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ca}$ 28. $\frac{1}{\sqrt{5}+7x}-\frac{1}{\sqrt{5}-7x}$.

29. दर्शाई गई संक्रियाएँ कीजिए :

$$\frac{3x^2+5x}{x^3-3x}-\frac{x^3+3x^2-1}{3x^3-9x}$$

30. यदि $R=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ तथा $S=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ है, तो निम्न ज्ञात कीजिए :

(i) $R+2S$ (ii) $R-2S$.

31. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल $(x^2-7x+12)$ वर्ग. मीटर है। यदि उसकी एक भुजा $(x-3)$ मीटर है, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

32. x, $1-x$ तथा $2+x$ के व्युत्क्रमों का योग ज्ञात कीजिए।

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

33. $(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$
34. $(\sqrt{2}\ x-y)(2x^2+\sqrt{2}\ xy+y^2)$

निम्न में से प्रत्येक के गुणनखंड कीजिए :

35. $1+8a^3$ 36. $125p^3-1$
37. $64k^3+216t^3$ 38. $27r^3+d^3$
39. $(1-t)^3+t^3$
40. सरल कीजिए :

$$\frac{(302)^3-(300)^3}{(302)^2+(302)(300)+(300)^2}$$

41. सिद्ध कीजिए कि

$$(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(3z-x)^3=3(x-2y)(2y-3z)(3z-x)$$

एकक V

रैखिक समीकरण और असमीकरण

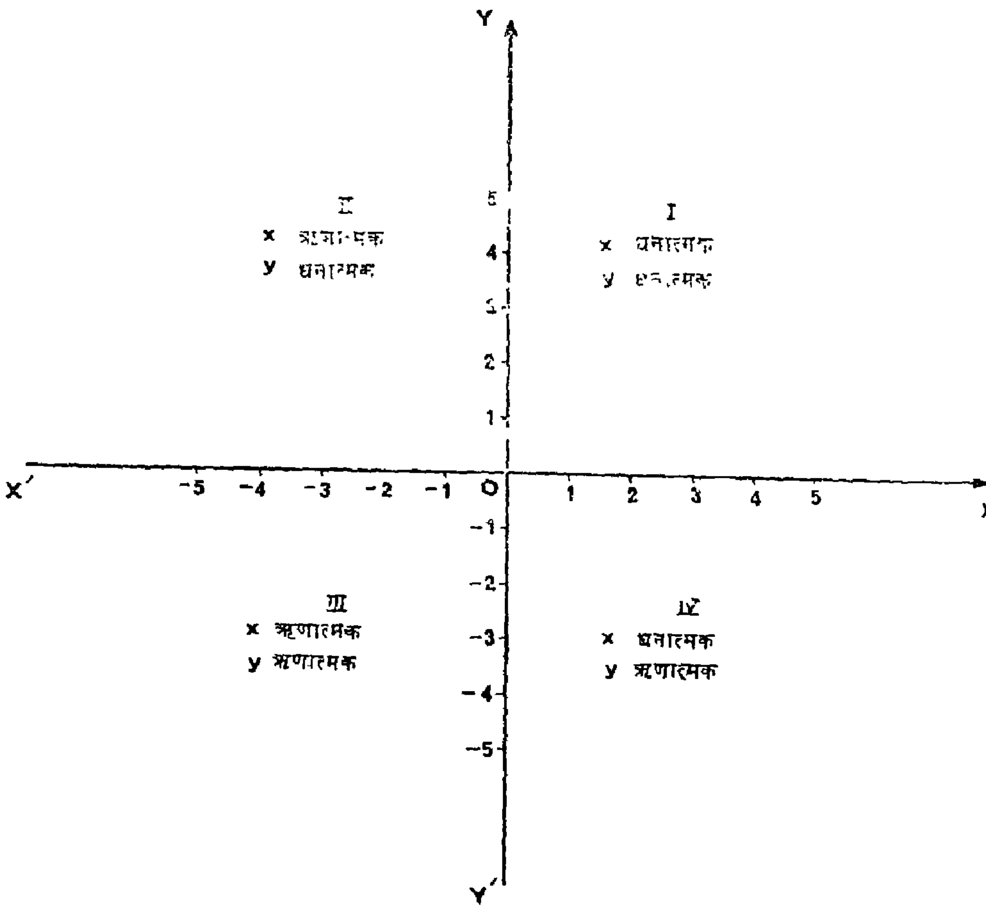
इस एकक में हम रैखिक समीकरणों और असमीकरणों (linear equations and inequations) के आलेखों (graphs) का अध्ययन करेंगे। हम दो चरों में युगपत् रैखिक समीकरणों (simultaneous linear equations) और आलेखन से तथा लुप्तीकरण (elimination) की विधि से उन्हें हल करने के बारे में भी पढ़ेंगे।

5.1 संख्या तल अथवा कार्टेजियन तल

कक्षा VII में, हमने सीखा था कि अपनी इच्छानुसार चुनी हुई निर्देशांक अक्षों के संदर्भ में एक तल में किसी बिंदु की स्थिति किस प्रकार, निर्धारित की जाती है। आपको याद होगा कि पहले चतुर्थांश (quadrant) में एक बिंदु के दोनों निर्देशांक धनात्मक (positive) होते हैं; दूसरे चतुर्थांश में x ऋणात्मक (negative) होता है तथा y धनात्मक; तीसरे चतुर्थांश में दोनों ऋणात्मक होते हैं, और चौथे चतुर्थांश में x धनात्मक होता है तथा y ऋणात्मक। (देखिए आकृति 5.1) आपको यह भी याद होगा कि दोनो निर्देशांकों को एक विशेष क्रम में लिखना पड़ता है। वह यह कि भुज (abscissa) पहले लिखा जाता है तथा कोटि (ordinate) बाद में। अत. (3,4) और (4,3) दो भिन्न बिंदुओं के निर्देशांक हैं।

हम यह पहले ही पढ़ चुके हैं कि वास्तविक संख्याओं को एक रेखा पर बिंदुओं द्वारा निरूपित किया जा सकता है और इसी कारण वह रेखा जिस पर वास्तविक संख्याएँ निरूपित की गई हैं **संख्या रेखा** कहलाती है। इसी प्रकार, एक तल में बिंदुओं की स्थिति निर्धारित करने के लिए निर्देशांकों की संकल्पना

को प्रविष्ट करके, हमने वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों (ordered pairs) को तल में बिंदुओं द्वारा निरूपित किया था। इसी कारण, वह तल



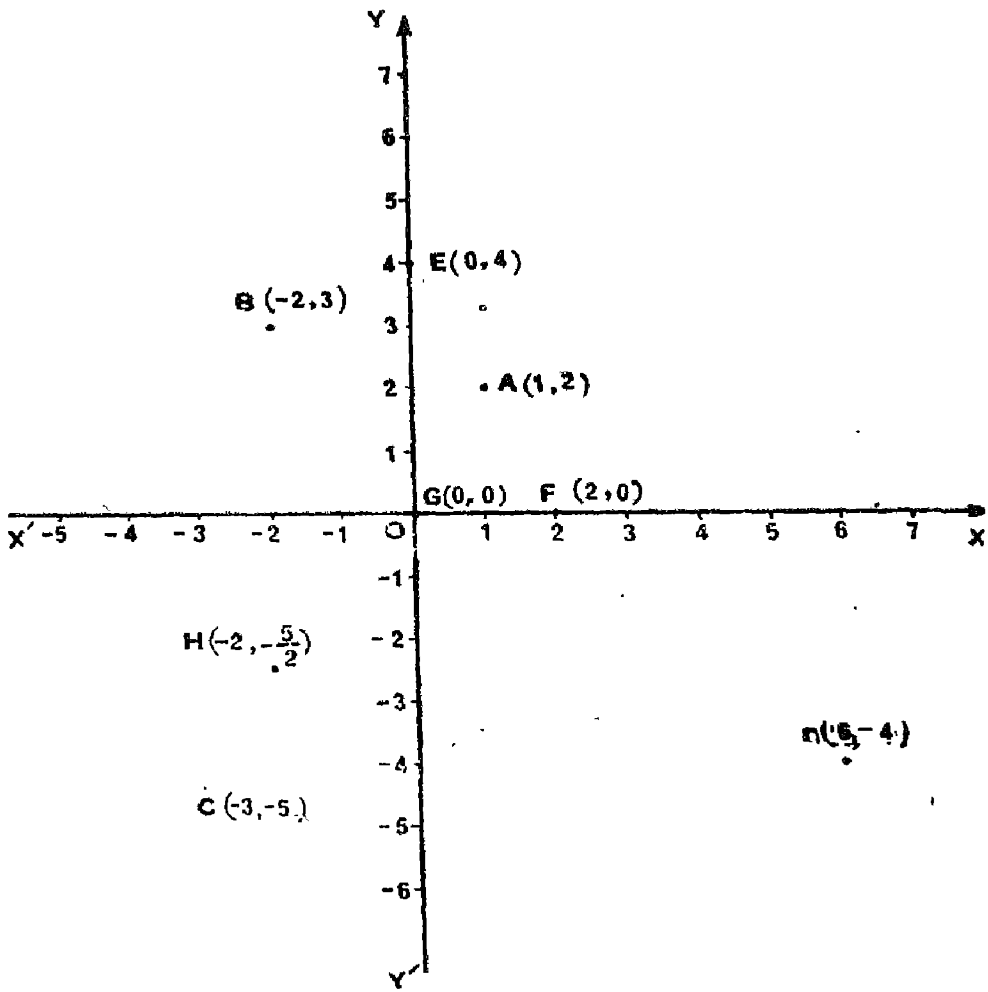
आकृति 5.1

जिस पर एक निर्देशांक पद्धति (coordinate system) प्रविष्ट कर ली गई है एक **संख्या तल** (number plane) कहलाता है चूँकि इसमें प्रयोग होने वाले निर्देशांक व्यापक रूप में कार्टेज़ियन होते हैं, अतः संख्या तल, **कार्टेज़ियन तल** **(cartesian plane)** भी कहलाता है।

उदाहरण 1 : निम्न बिंदुओं को आलेखित (plot) कीजिए :

(1, 2), (−2,3), (−3, −5), (6, −4), (0, 4),
(2, 0,) (0, 0), $(-2, -\frac{5}{2})$.

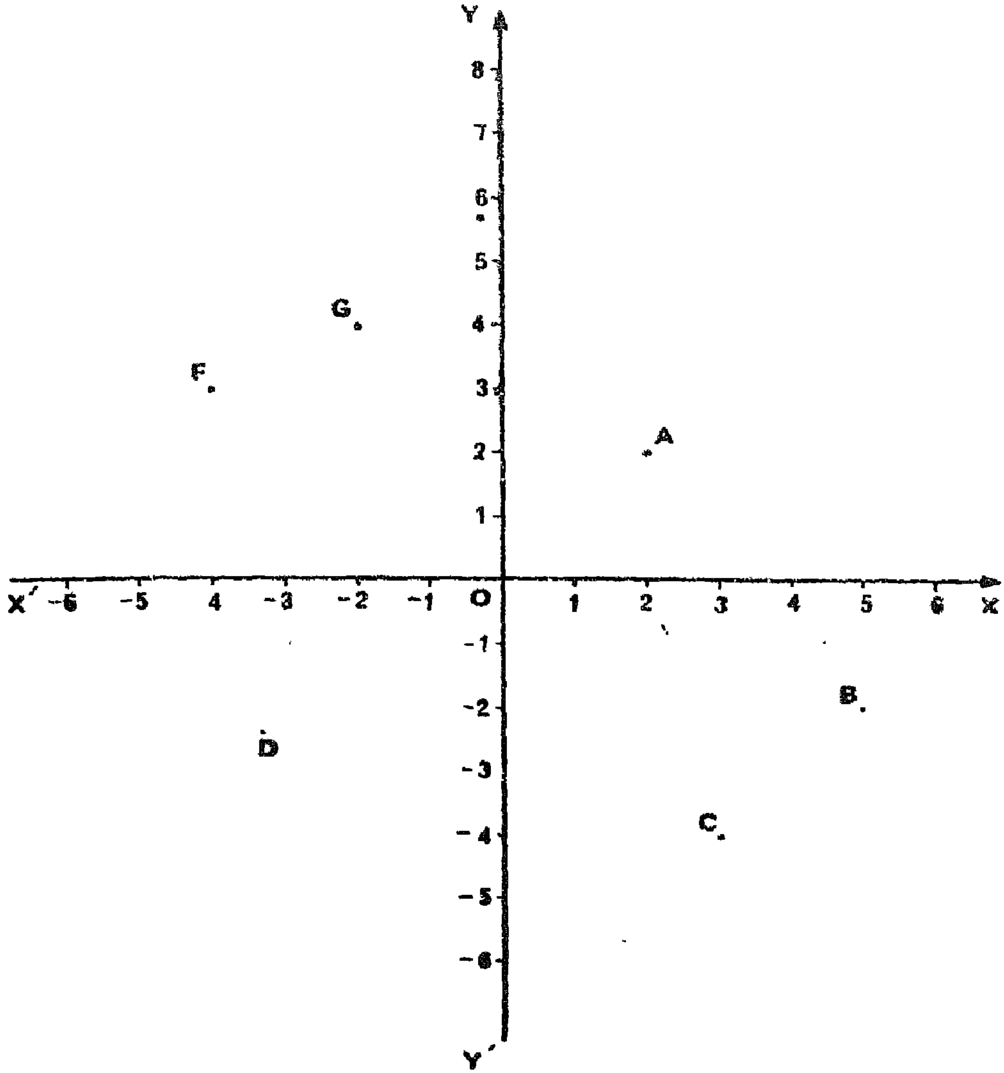
हल : मान लीजिए A ,B, C, D, E, F, G, H क्रमश: दिए हुए बिंदु हैं। इन बिंदुओं की स्थितियाँ आकृति 5.2 में दर्शाई गई हैं।



आकृति 5.2

प्रश्नावली 5.1

1. निम्न आकृति में बिंदुओं A, B, C, D, E, F, G के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :



आकृति 5.3

2. क्या क्रमित युग्म (2, 1) और (1, 2) संख्या तल का एक ही बिंदु निर्धारित करते हैं ?

3. क्या क्रमित युग्म (—1, 1) और (1, —1) संख्या तल का एक ही बिंदु निर्धारित करते हैं ?

4. अपनी इच्छानुसार निर्देशांक अक्षों को चुनकर संख्याओं के निम्न क्रमित युग्मों द्वारा निर्धारित बिंदुओं की स्थिति अंकित कीजिए

(i) (2, 3) (ii) (—2, —3) (iii) (—2, 3)
(iv) (3, —2) (v) (5, 4) (vi) (4, 5)
(vii) (4, —5) (viii) (—4, 5) (ix) (—4, —5)
(x) (4, 0) (xi) (0, —4)

5 तल के ऐसे 5 बिंदुओं की स्थिति दीजिए जिनका भुज 2 है।

5.2 आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

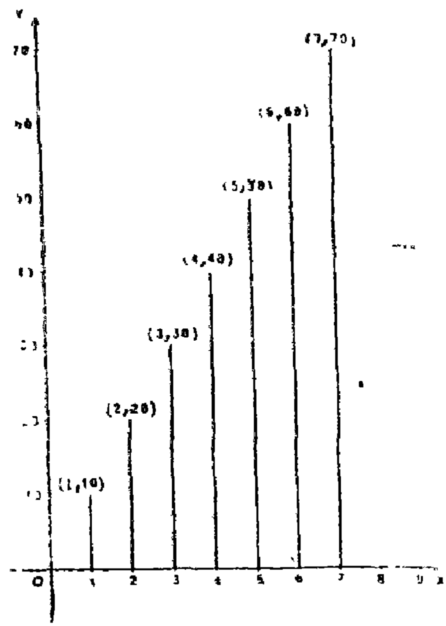
हम दैनिक जीवन की समस्याओं में आँकड़ों के आलेखीय निरूपण (graphical representation) के दो उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 2: यदि एक स्टेशन से दूसरे स्टेशन का प्रति यात्री रेल किराया 10 रु० है, तो दो यात्रियों का रेल किराया 20 रु० होगा, तीन यात्रियों का रेल किराया 30 रु० होगा, इत्यादि यह सूचना सुविधाजनक रूप से एक सारणी के रूप में निम्न प्रकार निरूपित की जा सकती है :

यात्रियों की सँख्या	1	2	3	4	5	6	7
रेल किराया (रुपयों मे)	10	20	30	40	50	60	70

हम इस सूचना को कार्टेजियन निर्देशांक पद्धति का प्रयोग करके चित्र के रूप में भी निरूपित कर सकते हैं :

यदि हम यात्रियों की संख्या को x-अक्ष या उसके समांतर रेखा के अनुदिश निरूपित करें तथा रुपयों में रेल किराये को y-अक्ष या उसके समांतर रेखा के अनुदिश निरूपित करें, तो उपर्युक्त सूचना को निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है जैसाकि आकृति 5.4 में दिखाया गया है।



आकृति 5.4

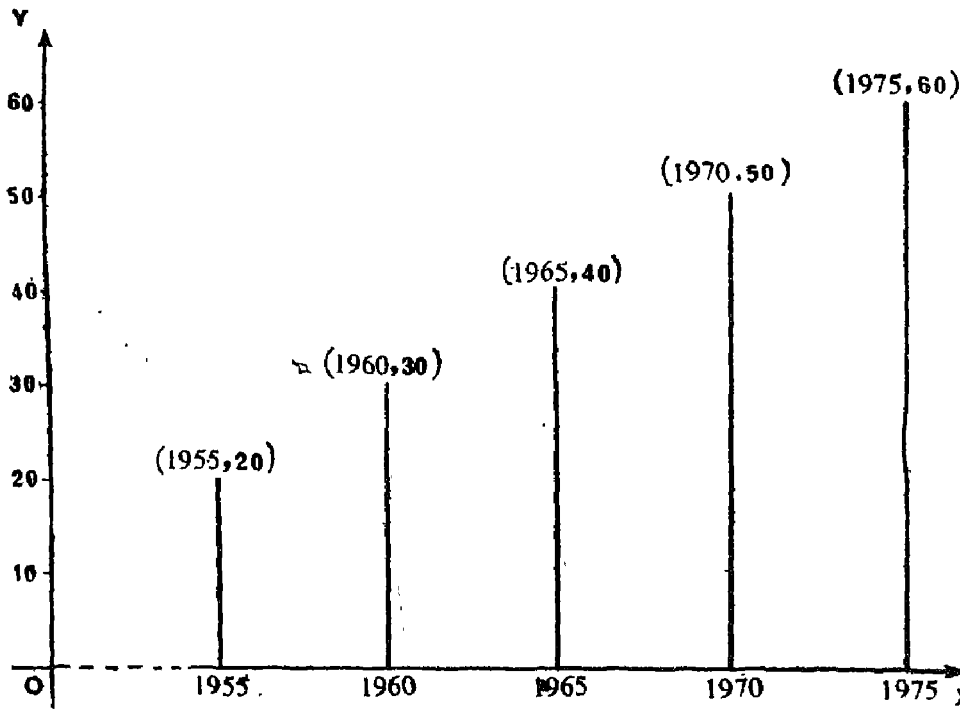
इस चित्रीय निरूपण (pictorial representation) को यात्रियों की संख्या के सापेक्ष रेल किराये का आलेख कहा जा सकता है।

उदाहरण 3 : एक शहर की 1955 में जनसंख्या 20 हज़ार थी, 1960 में वह 30 हजार थी, 1965 में वह 40 हजार थी जबकि 1970 और 1975 में वह क्रमश: 50 हजार और 60 हजार थी। हम इस सूचना को निम्न सारणी में निरूपित कर सकते हैं :

वर्ष	1955	1960	1965	1970	1975
जनसंख्या (हजार में)	20	30	40	50	60

पुनः कार्टेज़ियन निर्देशांक पद्धति का प्रयोग करके हम इस सूचना का चित्रीय निरूपण करते हैं।

यदि हम वर्ष को x-अक्ष या उसके समांतर रेखा के अनुदिश तथा हजारों में जनसंख्या को y-अक्ष या उसके समांतर रेखा के अनुदिश निरूपित करें, तो उपर्युक्त सूचना आकृति 5.5 में दिखाये अनुसार निरूपित होती है।



आकृति 5.5

इसे उस शहर की जनसंख्या वृद्धि का आलेख कहा जा सकता है।

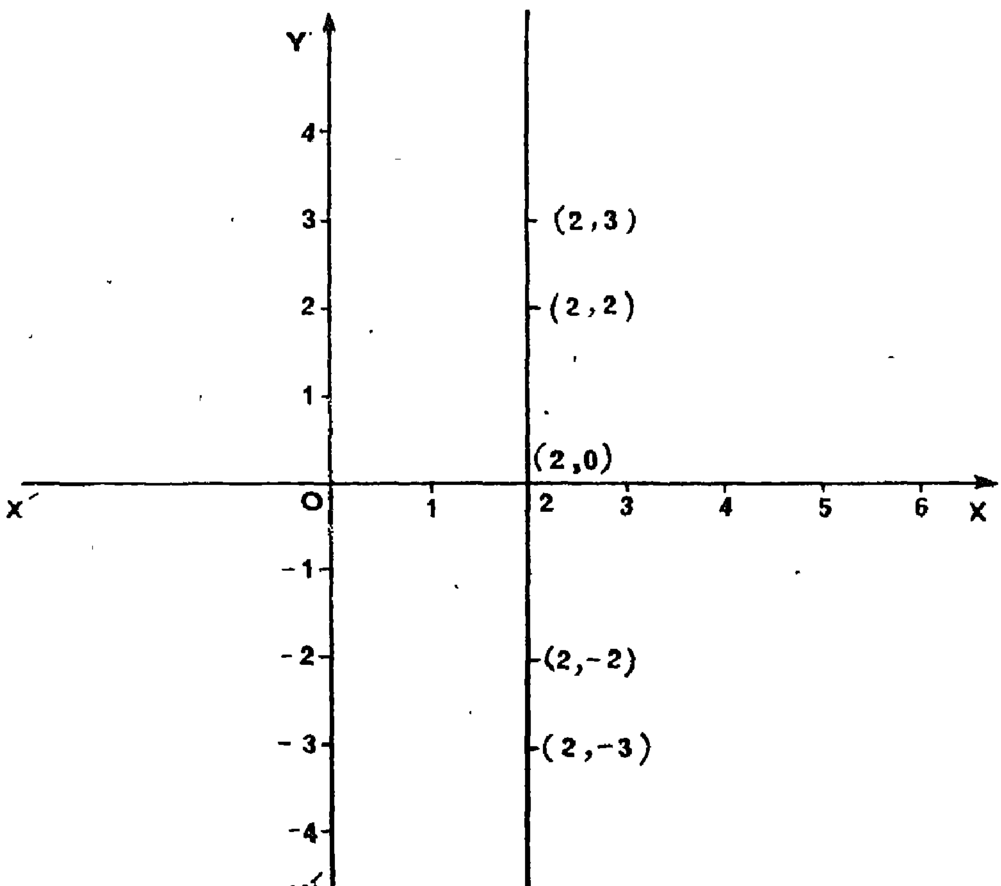
हम देखते हैं कि किसी सूचना का आलेख उस सूचना का एक चित्रीय निरूपण है।

अपनी पिछली कक्षाओं में, हम एक चर में रैखिक समीकरणों और असमीकरणों के बारे में पढ़ चुके हैं। इस अनुच्छेद और इससे अगले अनुच्छेद में हम इनके आलेखों का अध्ययन करेंगे।

5.3 एक चर में रैखिक समीकरणों के आलेख

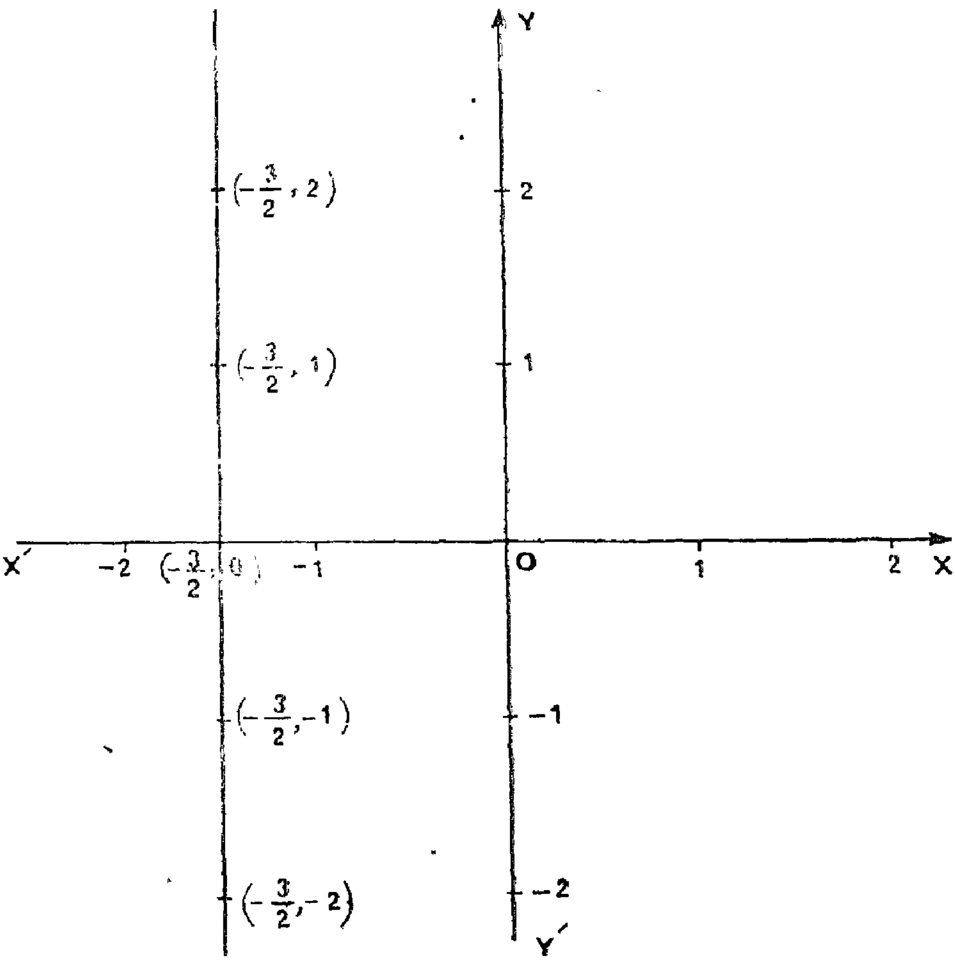
हम कुछ उदाहरणों की सहायता से एक चर में रैखिक समीकरणों के आलेखों के बारे में अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 4 : $x=2$ का आलेख



आकृति 5.6

आइए कार्टेजियन तल में कुछ ऐसे बिंदु लें जिनमें से प्रत्येक का भुज 2 है अर्थात् ऐसे बिंदु लें जिनके लिए x-निर्देशांक 2 के बराबर है। ऐसे कुछ उदाहरण (2,0), (2,2), (2,—2), (2,3) और (2,—3) हैं। आइए इन सभी



आकृति 5.7

बिंदुओं को आलेखित करें। (देखिए आकृति 5.6) हम देखते हैं कि ये सभी बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं जो OY के समांतर है। पुनः, यदि हम इस रेखा

पर कोई भी बिंदु लें तो उसका भुज 2 होगा अर्थात् x-निर्देशांक 2 होगा। इस प्रकार, यह एक ऐसी रेखा है कि वे सभी बिंदु, जिनके भुज x समीकरण $x=2$ को संतुष्ट करते हैं, इस रेखा पर स्थित हैं। हम इस रेखा को समीकरण $x=2$ का आलेख कहते हैं।

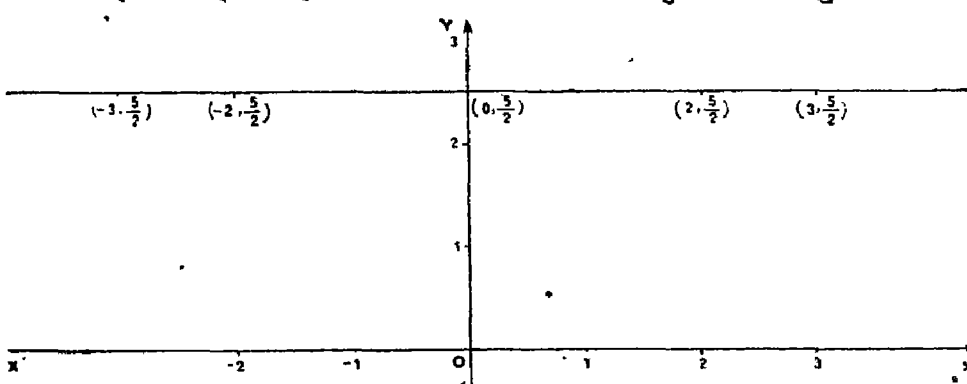
उदाहरण 5 : $2x+3=0$ का आलेख

दी हुई समीकरण से हमें प्राप्त होता है कि $x=-\frac{3}{2}$ है।

आइए कार्टेज़ियन तल में कुछ ऐसे बिंदु लें जिनमें से प्रत्येक का भुज $-\frac{3}{2}$ है अर्थात् ऐसे बिंदु जिनके लिए x—निर्देशांक $-\frac{3}{2}$ के बराबर हैं। ऐसे कुछ उदाहरण $(-\frac{3}{2},0)$, $(-\frac{3}{2}, 1)$, $(-\frac{3}{2},-1)$, $(-\frac{3}{2}, 2)$, $(-\frac{3}{2},-2)$ हैं। आइए इन सभी बिंदुओं को आलेखित करें। (देखिए आकृति 5.7) हम देखते हैं कि ये सभी बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं जो OY के समांतर है। पुनः यदि हम इस रेखा पर कोई भी बिंदु लें तो उसका भुज $-\frac{3}{2}$ होगा, अर्थात् x—निर्देशांक $-\frac{3}{2}$ होगा। इस प्रकार, यह एक ऐसी रेखा है कि वे सभी बिंदु, जिनके भुज x समीकरण $x=-\frac{3}{2}$ को संतुष्ट करते हैं, इस रेखा पर स्थित हैं। हम इस रेखा को समीकरण $x=-\frac{3}{2}$ का आलेख कहते हैं।

उदाहरण 6 : $y=\frac{5}{2}$ का आलेख

पहले की ही तरह, आइए कार्टेज़ियन तल में कुछ ऐसे बिंदु लें जिनमें



आकृति 5.8

से प्रत्येक की कोटि $\frac{5}{2}$ है अर्थात् ऐसे बिंदु जिनके लिए y—निर्देशांक $\frac{5}{2}$ के बराबर है। ऐसे कुछ उदाहरण $(0,\frac{5}{2})$, $(2,\frac{5}{2})$, $(-2,\frac{5}{2})$, $(-3,\frac{5}{2})$ हैं। आइए इन

सभी बिंदुओं को आलेखित करें। (देखिए आकृति 5.8) हम देखते हैं कि ये सभी बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं जो OX के समांतर है। पुन:, यदि हम इस रेखा पर कोई भी बिंदु लें तो उसकी कोटि $\frac{5}{2}$ होगी, अर्थात् y-निर्देशांक $\frac{5}{2}$ होगा। **इस प्रकार, यह एक ऐसी रेखा है कि वे सभी बिंदु, जिनकी कोटियाँ y समीकरण $y=\frac{5}{2}$ को संतुष्ट करती हैं, इस रेखा पर स्थित हैं।** हम इस रेखा को समीकरण $y=\frac{5}{2}$ का आलेख कहते हैं।

क्या आप देख सकते हैं कि हम $y=\frac{5}{2}$ को $2y-5=0$ के रूप में भी लिख सकते हैं ?

उपर्युक्त उदाहरणों से, हम देखते हैं कि **एक अज्ञात x या y में एक समीकरण का आलेख एक रेखा है जिसके भुज x या कोटियाँ y दी हुई समीकरण को संतुष्ट करते हैं।**

5.4 दो चरों में रैखिक समीकरण

आपको याद होगा कि एक चर में एक समीकरण समिका (equality) का एक ऐसा कथन होता है जिसमें एक अज्ञात अंतर्निहित होता है। **इसी प्रकार, दो चरों में एक समीकरण समिका का एक ऐसा कथन होता है जिसमें दो अज्ञात अंतर्निहित होते हैं।**

मान लीजिए कि किसी गाँव में चावल की पैदावार 50 क्विंटल प्रति हैक्टेयर है। यदि हम चावल के एक खेत का हैक्टेयर में क्षेत्रफल x से व्यक्त करें तथा क्विंटलों में पैदावार y से व्यक्त करें, तो

$$y=50x$$

इस प्रकार हम दो चरों x और y में एक समीकरण प्राप्त करते हैं। इस समीकरण में, क्षेत्रफल x जितना अधिक होगा, पैदावार y उतनी ही अधिक होगी। एक अन्य उदाहरण लीजिए।

एक संख्या y दूसरी संख्या x के दुगुने से सदैव 1 कम है। तब, x और y में निम्न संबंध है :

$$y=2x-1 \qquad (1)$$

जो दो चरों में एक समीकरण है।

यदि हम $x=3$, $y=5$ लें तो हम देखते हैं कि (1) एक सत्य कथन है। हम कहते हैं कि $x=3$, $y=5$ या यह कि **क्रमित युग्म (3,5) समीकरण (1) का एक हल है।**

क्या आप (1) के कुछ अन्य हल ज्ञात कर सकते हैं ? पुन: $x=4$, $y=7$

से (1) एक सत्य कथन हो जाता है। अतः, क्रमित युग्म (4,7) भी समीकरण (1) का एक हल है।

हम देखते हैं कि (1) में हम x को चाहे कोई भी मान दें, हमें y का ऐसा तदनुरूपी मान प्राप्त हो जाता है कि इस प्रकार प्राप्त क्रमित युग्म समीकरण (1) का एक हल है।

टिप्पणी : पिछला कथन सभी समीकरणों के लिए सत्य नहीं है। उदाहरणार्थ, यदि $2x=3$ है तो हम $\frac{3}{2}$ के अतिरिक्त x को कोई भी मान नहीं दे सकते। क्योंकि x के किसी भी अन्य मान से समीकरण सत्य नहीं होती।

समीकरण $x=-2$ को लीजिए। हम इसे $x+0y=-2$ के रूप में लिख सकते हैं। अतः इसे दो चरों में एक समीकरण समझा जा सकता है। इसी प्रकार, $3y=5$ को दो चरों में एक समीकरण $0x+3y=5$ के रूप में लिखा जा सकता है। हम देखते हैं कि

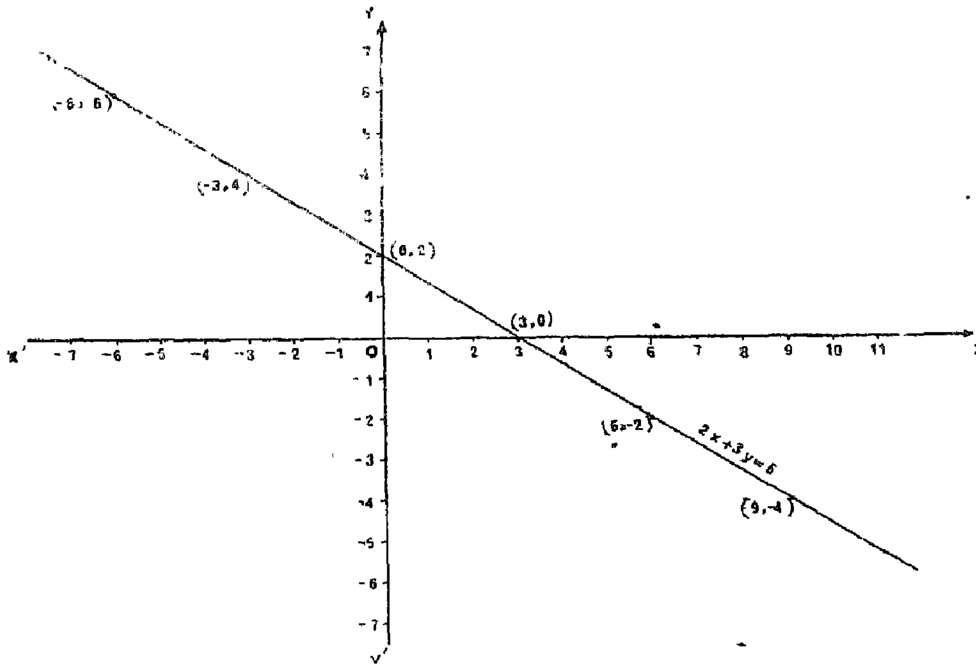
एक चर में प्रत्येक समीकरण को दो चरों में एक समीकरण समझा जा सकता है।

5.4.1 दो चरों में रैखिक समीकरणों के आलेख

उदाहरण 7 : $2x+3y=6$ का आलेख

कार्टेज़ियन तल XOY को लीजिए। पहले हमें कुछ ऐसे क्रमित युग्म ज्ञात करने की आवश्यकता है जो दी हुई समीकरण के हल हैं। फिर हम इन क्रमित युग्मों को तल पर बिंदुओं के रूप में आलेखित करेंगे। जाँच करने से, हम देखते हैं कि (0,2), (3,0), (−3,4) कुछ ऐसे क्रमित युग्म हैं जो दी हुई समीकरण को संतुष्ट करते हैं। इन बिंदुओं को तल पर आलेखित कीजिए। (देखिए आकृति 5.9) हम देखते हैं कि ये सभी बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं। हम यह भी देखते हैं कि कुछ अन्य बिंदु (9,−4), (−6,6), (6,−2) ऐसे हैं जो इस रेखा पर स्थित हैं। हम इसकी जाँच कर सकते हैं कि ये उपर्युक्त समीकरण के हल भी हैं। हम इस रेखा को **समीकरण $2x+3y=6$ का आलेख** कहते हैं।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।



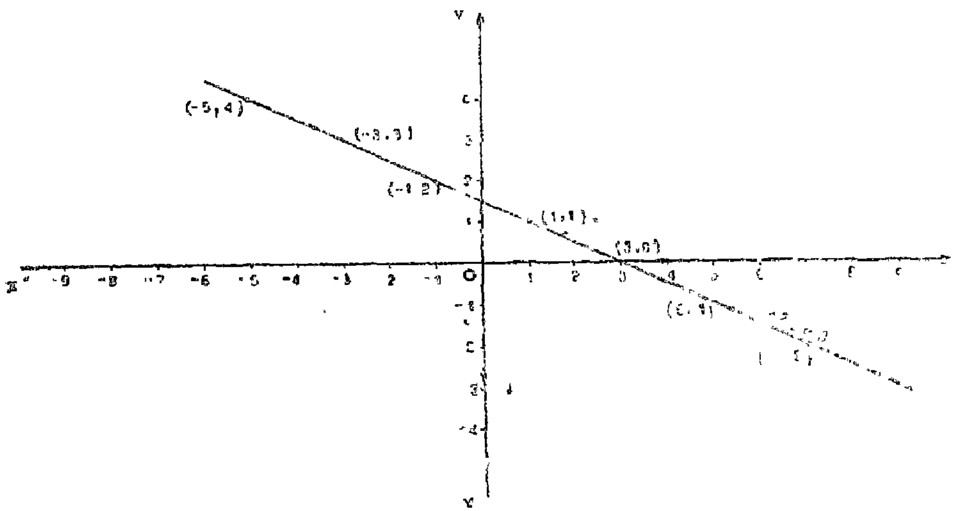
आकृति 5.9

उदाहरण 8 : $x+2y=3$ का आलेख

हम कार्टेज़ियन तल XOY लेते हैं। (1,1) (3,0), (—1 2) इस समीकरण के कुछ हल हैं। हम इन बिंदुओं को कार्टेज़ियन तल पर आलेखित करते हैं। (देखिए आकृति 5.10) हम देखते हैं कि ये बिंदु एक रेखा पर स्थित हैं। इस रेखा पर कुछ अन्य बिंदु (5,—1), (7,—2), (—3,3), (—5,4) हैं। हम देखते हैं कि इनमें से प्रत्येक क्रमित युग्म भी दी हुई समीकरण का एक हल है।

हम इस रेखा को समीकरण $x+2y=3$ का आलेख कहते हैं।

हम देखते हैं कि एक या दो चरों में एक रैखिक समीकरण का आलेख सदैव एक रेखा होता है। साथ ही, याद कीजिए कि जैसे ही हमें किसी रेखा के दो बिंदु ज्ञात हो जाते हैं तो वह रेखा निर्धारित हो जाती है। अतः, एक



आकृति 5.10

रैखिक समीकरण का आलेख प्राप्त करने के लिए उस समीकरण के दो हल प्राप्त करना पर्याप्त रहता है। तब, इन दो हलों के तदनुरूपी दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा उस समीकरण का आलेख है।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्न समीकरणों के आलेख खींचिए :

   (i) $2x = -3$ (ii) $y = -4$

   (iii) $2y = -5$ (iv) $3x = -4$

2. समीकरण $y = -x$ का आलेख खींचिए। आलेख से x का वह मान पढ़िए जब $y = 2$ है तथा y का वह मान पढ़िए जब $x = -3$ है।

3. $x + y = -3$ का आलेख खींचिए। आलेख से y का वह मान पढ़िए जब $x = -$[illegible] है तथा x का वह मान पढ़िए जब $y =$ [illegible] है।

4. निम्न में से प्रत्येक का आलेख खींचिए :

   (i) $3x + 4y = 6$ (ii) $y - 3x = 4$

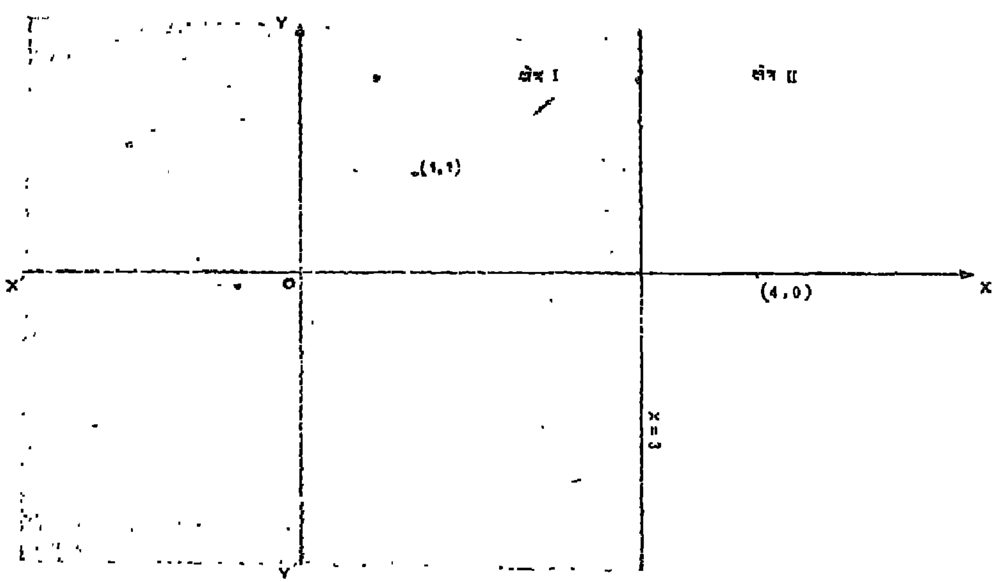
   (iii) $y = -2x + 1$ (iv) $x - y + 3 = 0$

5.5 एक चर में रैखिक असमीकरणों के आलेख

आपको याद होगा कि एक चर में एक रैखिक असमीकरण (linear inequation) असमिका (inequality) का एक कथन होता है जिसमें एक अज्ञात अंतर्निहित होता है। अब हम ऐसी रैखिक असमीकरणों के आलेखों के बारे में अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 9 : असमीकरण $x \leqslant 3$ का आलेख

हल : पहले हम समीकरण $x=3$ का आलेख खींचते हैं। यह y-अक्ष के समांतर एक रेखा है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज 3 है। यह रेखा तल को दो क्षेत्रों (regions), मान लीजिए; I और II, में विभाजित करती है। (देखिए आकृति 5.11) आइए क्षेत्र I में कोई बिंदु लें। ऐसा एक सुविधाजनक बिंदु (1, 1) है। स्पष्ट है (1, 1) असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट करता है। इसी प्रकार, क्षेत्र I में प्रत्येक अन्य बिंदु का भुज < 3 है और इसलिए वह असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट करता है।

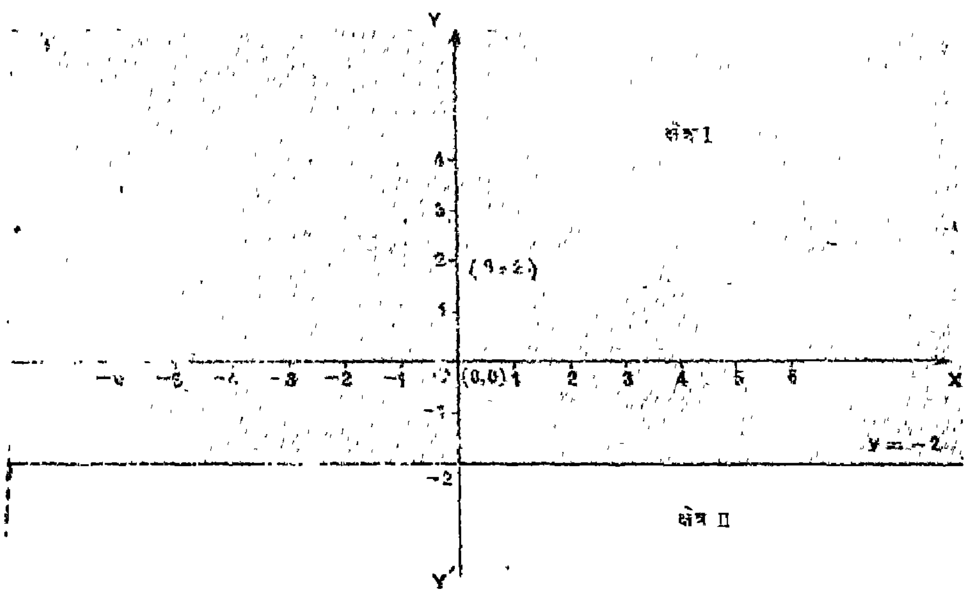


आकृति 5.11

अब हम क्षेत्र II में कोई बिंदु लेते हैं। ऐसा एक सुविधाजनक बिंदु (4, 0) है। क्रमित युग्म (4, 0) असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट नहीं करता। साथ ही, स्पष्ट है कि क्षेत्र II में किसी अन्य बिंदु का भुज भी > 3 है और इसलिए वह असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट नहीं करता। रेखा $x=3$ पर, जो क्षेत्रों I और II को पृथक करती है, स्थित प्रत्येक बिंदु का भुज $x=3$ है और इसलिए वह असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट करता है। चूंकि क्षेत्र I या रेखा $x=3$ के प्रत्येक बिंदु का भुज असमीकरण $x \leqslant 3$ को संतुष्ट करता है, अतः **रेखा $x=3$ को सम्मिलित करते हुए क्षेत्र I असमीकरण $x \leqslant 3$ का आलेख कहलाता है।**

उदाहरण 10 : असमीकरण $y \geqslant -2$ का आलेख

हल : पहले हम समीकरण $y=-2$ का आलेख खींचते हैं। यह x-अक्ष



आकृति 5.12

के समांतर एक रेखा है जो बिंदु (0,—2) से होकर जाती है। यह रेखा तल X O Y को दो क्षेत्रों, मान लीजिए I और II, में विभाजित करती है (देखिए आकृति 5.12)

क्षेत्र I में कोई बिंदु लीजिए। ऐसा एक सुविधाजनक बिंदु (0, 0) है। क्रमित युग्म (0, 0) असमीकरण $y \geqslant -2$ को संतुष्ट करता है। साथ ही क्षेत्र I में प्रत्येक अन्य बिंदु की कोटि > -2 है। इनका तदनुरूपी क्रमित युग्म असमीकरण $y \geqslant -2$ को संतुष्ट करता है। क्षेत्र II में प्रत्येक बिंदु की कोटि < -2 है। इनका तदनुरूपी क्रमित युग्म असमीकरण $y \geqslant -2$ को संतुष्ट नहीं करता है। साथ ही, उस रेखा पर, जो क्षेत्रों I और II को पृथक करती है, स्थित प्रत्येक बिंदु $y = -2$ को संतुष्ट करता है और इसलिए $y \geqslant -2$ को संतुष्ट करता है।

रेखा $y = -2$ को सम्मिलित करते हुए क्षेत्र I को हम असमीकरण $y \geqslant -2$ का आलेख कहते हैं।

सारांश के रूप में, हम कहते है कि **एक असमीकरण का आलेख तल का वह क्षेत्र है जिसका प्रत्येक बिंदु दी हुई असमीकरण को संतुष्ट करता है।**

प्रश्नावली 5.3

निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक का आलेख खींचिए :

1. $x > -3$

2. $y < -2$

3. $2y + 3 \geqslant 0$

4. $3x + 6 \leqslant 0$

5. $x < 0$

6. $x \leqslant 0$

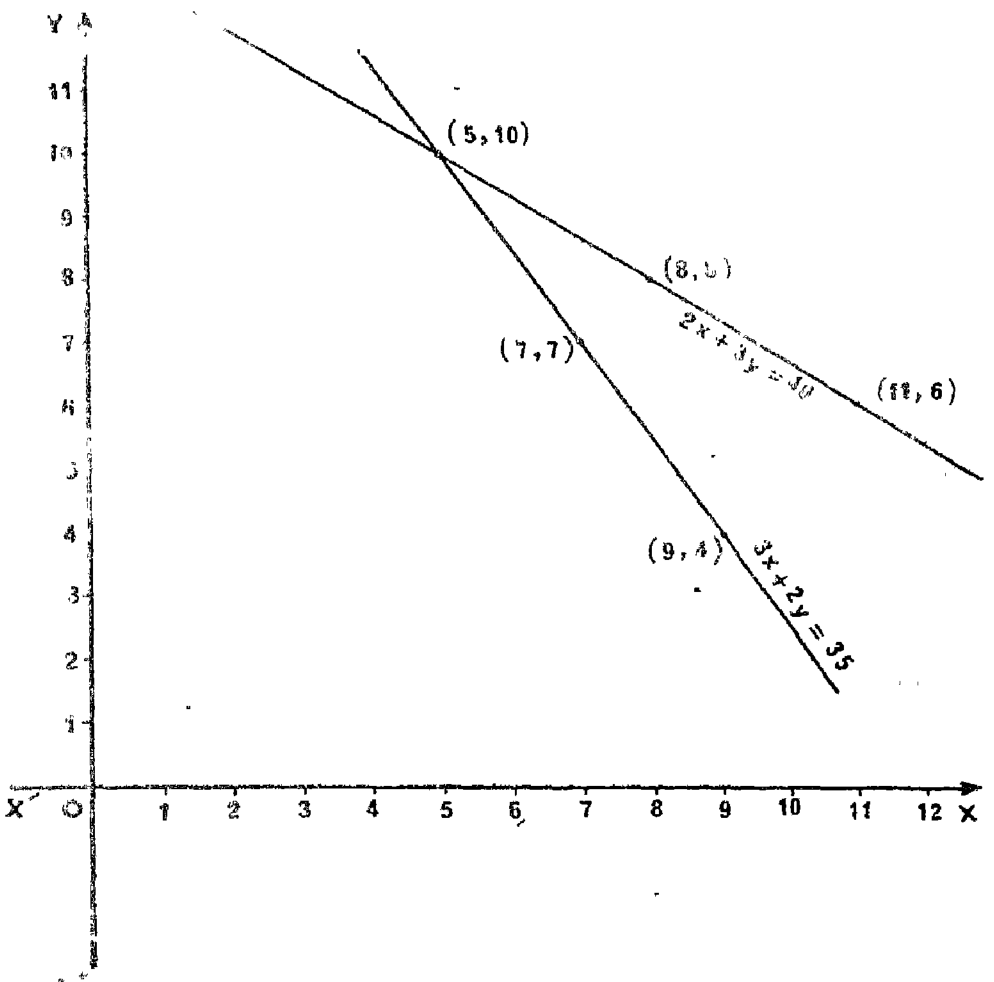
7. $y > 0$

5.6 दो चरों में युगपत रैखिक समीकरण— आलेखन द्वारा हल

उदाहरण 11 : एक कक्षा का एक प्रश्न पत्र दो खंडों A और B में विभाजित किया गया है। खंड A में सभी प्रश्नों के अंक समान हैं तथा खंड B में भी सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। राम खंड A से 2 प्रश्न तथा खंड B से 3 प्रश्न सही हल करता है। उसे 40 अंक प्राप्त होते हैं। रहीम खंड A से 3 प्रश्न

तथा खंड B से 2 प्रश्न सही हल करता है। उसे 35 अंक प्राप्त होते हैं। खंड A के प्रत्येक प्रश्न और खंड B के प्रत्येक प्रश्न के अंक निर्धारित कीजिए।

हल : मान लीजिए कि खंड A का प्रत्येक प्रश्न x अंकों का है तथा खंड B का प्रत्येक प्रश्न y अंकों का है। राम और A से 2 प्रश्न ... 3



आकृति 5.13

प्रश्न सही हल करता है। अतः उसके द्वारा प्राप्त अंक $2x+3y$ होंगे। परन्तु 40 अंक प्राप्त होते हैं। अतः हमें निम्न समीकरण प्राप्त होती है :

$$2x+3y=40 \quad (1)$$

इसी प्रकार, रहीम द्वारा प्राप्त अंकों के लिए, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होती है :

$$3x+2y=35 \quad (2)$$

इस प्रकार प्राप्त दोनों समीकरण **युगपत् रैखिक समीकरण** अथवा **रैखिक समीकरणों का एक निकाय** कहलाते हैं।

हमें x और y के ऐसे मान ज्ञात करने हैं कि समीकरण (1) और (2) युगपत् रूप से (एक साथ) संतुष्ट हो जाएँ। अर्थात् हमें एक क्रमित युग्म (x,y) ऐसा ज्ञात करना है कि वह (1) और (2) दोनों का हल हो। ऐसा युग्म ज्ञात करने की एक विधि यह है कि समीकरणों (1) और (2) के आलेख खींचें।

आकृति 5.13 से हम देखते हैं कि दोनों रेखाएँ बिंदु (5, 10) पर प्रतिच्छेद करती हैं। यह (1) के आलेख पर स्थित है। अतः यह समीकरण (1) का एक हल है। साथ ही, यह (2) के आलेख पर भी स्थित है और इसलिए समीकरण (2) का एक हल है। इस प्रकार, (5, 10) दोनों समीकरणों (1) और (2) का एक हल है। अतः $x=5$ और $y=10$ हमारी समस्या का हल है। दूसरे शब्दों में, खंड A का प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है तथा खंड B का प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 12 : सोहन के पिता की आयु सोहन की आयु की चार गुनी है। चार वर्ष पहले उसके पिता की आयु उसकी उस समय की आयु की छः गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए सोहन की वर्तमान आयु x वर्ष है तथा उसके पिता की वर्तमान आयु y वर्ष है। सोहन के पिता की आयु सोहन की आयु की चार गुनी है, अतः

$$y=4x \quad (1)$$

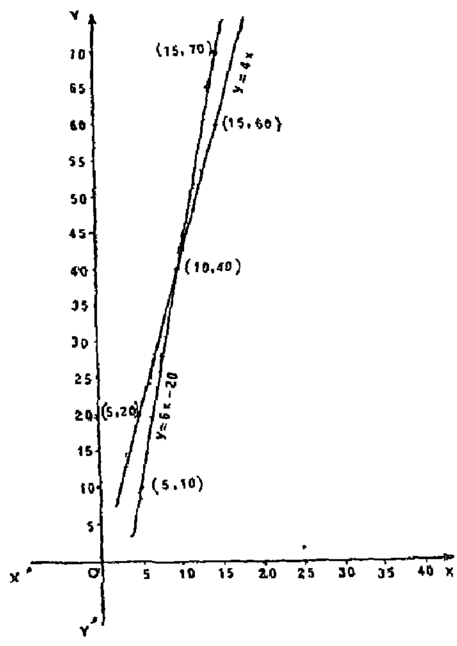
चार वर्ष पहले उनकी आयु क्रमशः $x-4$ और $y-4$ थी। अतः दिए हुए दूसरे प्रतिबन्ध से,

$$y - 4 = 6(x - 4)$$

अर्थात्, $$y = 6x - 20 \qquad (2)$$

हमें x और y के ऐसे मान ज्ञात करने की आवश्यकता है जो (1) और (2) दोनों को संतुष्ट करें।

हम समीकरणों (1) और (2) के आलेख खींचते हैं। ये दो रेखाएं हैं। (देखिए आकृति 5.14) आकृति से हम देखते हैं कि रेखाएं बिंदु (10, 40) पर प्रतिच्छेद करती हैं। इस प्रकार x=10, y=40 दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं और इसलिए हमारी समस्या के हल हैं। दूसरे शब्दों में, सोहन और उसके पिता की वर्तमान आयु क्रमशः 10 और 40 वर्ष है।



आकृति 5.14

हम देखते हैं कि दो युगपत् रैखिक समीकरणों के एक निकाय का हल ज्ञात करने के लिए हम दोनों समीकरणों के आलेख खींचते हैं। दोनों आलेखों

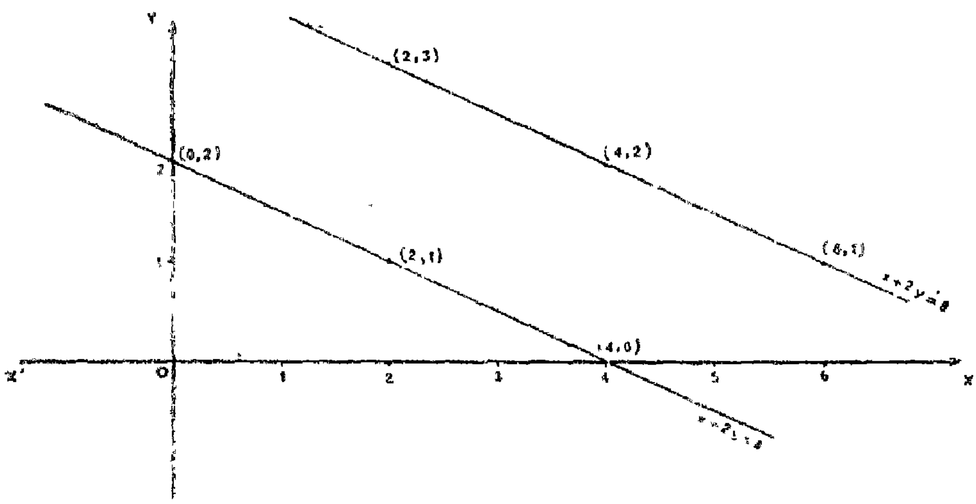
का प्रतिच्छेद बिंदु (point of intersection) यदि कोई है तो, उस समीकरण निकाय का एक हल होता है।

5.6.1 क्या दो युगपत् रैखिक समीकरणों के निकाय का सदैव एक हल होता है ? यह आवश्यक नहीं है जैसाकि निम्न उदाहरण से स्पष्ट है :

उदाहरण 13 : निम्न समीकरण निकाय को लीजिए :

$$x+2y=4$$
$$x+2y=8$$

इन समीकरणों के आलेख आकृति 5.15 में दिखाए गए हैं।



आकृति 5.15

हम देखते हैं कि दोनों रेखाएँ समांतर हैं और प्रतिच्छेद नहीं करतीं। इस प्रकार, दोनों आलेख में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अतः दिए हुए समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

ऐसा समीकरण निकाय जिसका कोई हल नहीं है विरोधी समीकरण निकाय (system of inconsistent equations) कहलाता है।

देखिए कि $x+y=3$, $x+y=8$ एक अन्य विरोधी समीकरण निकाय है। उपर्युक्त कथन की जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 5.4

निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा हल कीजिए :

1. $x+3y=12$
   $3x+y=12$
2. $x-2y=16$
   $2x+y=2$
3. $x+2y-3=0$
   $-x-2y+6=0$
4. $x+y-6=0$
   $2x+3y=12$
5. $2x+3y=5$
   $3x+2y=10$
6. $-x+2y+10=0$
   $2x-y-8=0$
7. $2x-4y=3$
   $3x-6y=1$
8. $x-y=3$
   $x+y=5$

5.7 दो चरों में दो युगपत् रैखिक समीकरणों का हल करना

5.7.1 योग और व्यवकलन द्वारा लुप्तीकरण की विधि

उदाहरण 14 : समीकरण निकाय

$$3x-2y=19$$
$$x+y=23$$

को हल कीजिए।

हल : याद कीजिए कि यदि एक समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर (non-zero) संख्या से गुणा किया जाता है तो उस समीकरण के समिका चिह्न (equality sign) में कोई अंतर नहीं आता। हम दूसरी समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से गुणा करते हैं। तब, समीकरण निकाय निम्न हो जाता है :

$$3x-2y=19$$
$$2x+2y=46$$

हमें ज्ञात होता है कि अब दोनों समीकरणों में y के गुणांक संख्यात्मक रूप से एक ही हैं। यदि हम इन समीकरणों को जोड़ें, तो y वाले पद कट जाते हैं और हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$5x = 65$$

दोनों पक्षों को 5 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$x = 13$$

दूसरी समीकरण में $x = 13$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$13 + y = 23$$

अर्थात्, $y = -13 + 23 = 10$

अत: $x = 13$, $y = 10$ दिए हुए समीकरण निकाय का एक हल है।

आइए अपने हल की जाँच करें। जब हम दी हुई समीकरणों में x और y के ये मान प्रतिस्थापित करते हैं, तो हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$3x - 2y = 3 \times 13 - 2 \times 10 = 39 - 20 = 19$$

तथा $x + y = 13 + 10 = 23$

इस प्रकार, समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं और हमारा हल सही है।

उदाहरण 15 : निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$3x - 2y = -10 \qquad (1)$$

$$4x + y = 49 \qquad (2)$$

हल : दूसरी समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से गुणा कीजिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$8x + 2y = 98 \qquad (3)$$

ध्यान दीजिए कि समीकरणों (1) और (3) में y के गुणांक संख्यात्मक रूप से समान हैं। हम (1) और (3) को जोड़ते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$11x = 88$$

अर्थात्, $x = 8$

x के इस मान को (2) में रखिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$32 + y = 49$$

अर्थात्, $y = 17$

अत: (8, 17) दिए हुए निकाय का एक हल है। इसकी जाँच कीजिए।

उदाहरण 16 : निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x+3y=10 \quad (1)$$

$$3x+2y=5 \quad (2)$$

हल : समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 3 से तथा (2) के दोनों पक्षों को 2 से गुणा कीजिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$6x+9y=30 \quad (3)$$

$$6x+4y=10 \quad (4)$$

दोनों समीकरणों में अब x के गुणांक समान हैं। (4) को (3) में से घटाइए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$5y=20$ अर्थात् $y=4$

$y=4$ को (1) में रखिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$2x+12=10$ अथवा $2x=-2$ अर्थात् $x=-1$

अतः, (—1, 4) दिए हुए समीकरण निकाय का एक हल है। इसकी जाँच कीजिए।

हम देखते हैं कि योग या व्यवकलन का प्रयोग करते हुए लुप्तीकरण द्वारा हल ज्ञात करने की विधि में निम्न चरण हैं :

चरण I : हम दोनों समीकरणों में चरों के गुणांकों की तुलना करते हैं।

चरण II : हम समीकरणों को उपयुक्त संख्या से गुणा (या भाग) करते हैं ताकि दोनों समीकरणों के दोनों चरों में एक के गुणांक संख्यात्मक रूप से समान हो जाएँ।

चरण III : हम दोनों समीकरणों को जोड़ते हैं या एक समीकरण में से दूसरी समीकरण घटाते हैं ताकि समान गुणांकों वाला चर लुप्त हो जाए।

चरण IV : हम बचे हुए चर में परिणामी समीकरण को हल करते हैं और उस चर का मान ज्ञात करते हैं।

चरण V : हम चरण IV में प्राप्त चर के मान को मूल समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे दूसरे चर में एक समीकरण

प्राप्त होती है। इस अकेली समीकरण को हल करने पर हमें दूसरे चर का भी मान प्राप्त हो जाता है।

चरण VI : जाँच कीजिए कि दिए हुए समीकरण अज्ञातों के उपर्युक्त प्राप्त मानों से संतुष्ट हो जाते हैं :

प्रश्नावली 5.5

योग और व्यवकलन द्वारा लुप्तीकरण की विधि से निम्न समीकरण निकायों को हल कीजिए :

1. $x-y=-1$
   $10x-8y+7=0$
2. $2x+3y+5=0$
   $3x-2y-12=0$
3. $6x-2y=1$
   $3x+10y=6$
4. $5x+9y=89$
   $2x-17y=15$
5. $2x+3y=5$
   $3x+2y=10$
6. $4x-3y=7$
   $3x-4y=14$
7. $x-y=3$
   $3x+4y=10$

5.7.2 प्रतिस्थापन द्वारा लुप्तीकरण की विधि

उदाहरण 17 : निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x-y=3 \qquad (1)$$

$$3x+4y=9 \qquad (2)$$

हल : समीकरण (1) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-y=3-x \text{ अर्थात् } y=x-3$$

y के इस मान को (2) में रखिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3x+4(x-3)=9$$

अर्थात्, $3x+4x-12=9$
जिससे, $7x=21$
अर्थात् $x=3$
$x=3$ को (1) में रखिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3-y=3 \text{ अर्थात् } y=0$$

अतः, (3,0) समीकरणों (1) और (2) के निकाय का एक हल है।

क्या आप इसकी जाँच कर सकते हैं ?

हम देखते हैं कि प्रतिस्थापन द्वारा लुप्तीकरण की विधि में निम्न चरण है :

चरण I : समीकरणों में से एक से हम एक अज्ञात को दूसरे अज्ञात के पदों में व्यक्त करते हैं।

चरण II : अज्ञात के इस मान को दूसरी समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए। हमें केवल एक चर में एक समीकरण प्राप्त होती है। एक चर में इस रैखिक समीकरण को हल कीजिए। इससे एक अज्ञात का मान प्राप्त हो जाता है।

चरण III : अज्ञात के चरण II में प्राप्त मान को मूल या निकाली गई समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित कीजिए और फिर उसे दूसरे अज्ञात के लिए हल कीजिए।

ध्यान दीजिए कि वस्तुतः दोनों विधियाँ एक समान हैं। प्रत्येक में हम दोनों चरों में से किसी एक को लुप्त करते है ताकि दूसरे चर में एक सरल समीकरण प्राप्त हो जाए। आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 18 : निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x-2y=6 \qquad (1)$$
$$2x+y=2 \qquad (2)$$

हल : (2) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y=2-2x$$

y के इस मान को (1) में प्रतिस्थापित कीजिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$x-2(2-2x)=6$$

अर्थात्, $x-4+4x=6$
जिससे, $5x=10$, अर्थात् $x=2$
(3) में $x=2$ रखिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$y=2-4=-2$

अतः (2,—2) दिए हुए निकाय का एक हल है। इसकी जाँच कीजिए।

उदाहरण 19 : निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x+y=3 \qquad (1)$$

$$2y-3x=6 \qquad (2)$$

हल : (1) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y=3-2x \qquad (3)$$

y के इस मान को (2) में रखिए। तब,

$$2(3-2x)-3x=6$$

अर्थात्, $6-4x-3x=6$

जिससे, $7x=0$ अर्थात् $x=0$

(3) में $x=0$ रखिए। हमें प्राप्त होता है कि

$$y=3$$

अतः, (0,3) दिए हुए समीकरण निकाय का एक हल है। इसकी जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 5.6

प्रतिस्थापन द्वारा लुप्तीकरण की विधि का प्रयोग करते हुए निम्न समीकरण निकायों को हल कीजिए :

1. $x+y=60$
$2x+5y=165$

2. $9x+4y=19$
$-9x+30y=270$

3. $2x+7y=13$
$2x+2y=5$

4. $4x+3y=7$
$10x-3y=7$

5. $2x+3y-8=0$
$5x-8y+11=0$

6. $2x+5y=34$
$x+3y=20$

7. $3x-5y=7$
$2x+3y=12$

5.8 दो चरों में रैखिक असमीकरण

दो भाई राम और श्याम गाँव का मेला देखने जाते हैं और उनके पिता ने उन्हें मेले में खर्च करने के लिए जेब खर्च के रूप में 10 रु० दिए। उन्हें यह छूट है कि वे इस राशि को जैसे चाहें खर्च करें। मान लीजिए राम द्वारा खर्च की गई राशि x है जबकि श्याम द्वारा खर्च की गई राशि y है। चूँकि दोनों मिलकर 10 रु० से अधिक खर्च नहीं कर सकते, अतः हमें प्राप्त होता है कि

$$x+y\leqslant 10$$

यह दो चरों में एक असमीकरण है। व्यापक रूप में,

असमिका का वह कथन जिसमें दो अज्ञात राशियाँ अंतर्निहित हों, दो चरों में एक असमीकरण कहलाती है। हम ऐसी असमीकरणों और उनके आलेखों के बारे में उच्चतर कक्षाओं में पढ़ेंगे।

मुख्य संकल्पनाएँ

एक और दो चरों में रैखिक समीकरणों के आलेख	युगपत् समीकरण :
दो चरों में रैखिक समीकरण	आलेखन द्वारा हल
एक चर में रैखिक असमीकरणों के आलेख	लुप्तीकरण की विधि

एकक VI

सारणियों का उपयोग

इस एकक में, हम धनपूर्णांकों के वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल, इत्यादि ज्ञात करने में सारणियों का उपयोग करना सीखेंगे। हम ब्याज ज्ञात करने में भी सारणियों का उपयोग करना सीखेंगे।

6.1 भूमिका

गणित में ऐसे अनेक संख्यात्मक परिकलन हैं जिन्हें विभिन्न प्रकारों की समस्याओं में बार-बार करना पड़ता है। उदाहरणार्थ, हमें प्राय: धनपूर्णांकों के वर्ग, घन, वर्गमूल, घनमूल, इत्यादि परिकलित करने पड़ते हैं। इसके स्थान पर कि आवश्यकता अनुसार प्रत्येक बार ऐसे परिकलन किए जाएं हम यह कर सकते हैं कि इन परिकलनों को सदा के लिए एक बार कर लें और सारणियों के रूप में लिख लें। अब आवश्यकता पड़ने पर वांछित मान इन सारणियों को केवल पढ़कर ही ज्ञात हो जाएंगे। इससे हमारा परिश्रम काफी बच जाएगा। वस्तुत:, अनेक प्रकारों के गणितीय व्यंजकों के लिए ऐसे परिकलन किए जा चुके हैं और वे छपे हुए रूप में उपलब्ध हैं। ऐसी सारणियों का एक समूह 1 से 12500 तक के सभी धनपूर्णांकों के वर्ग, घन इत्यादि की सारणियों का है जो **बारलो सारणियों** (Barlow's Tables) के नाम से विख्यात है।

इस एकक में, हम वर्ग, घन इत्यादि की सारणियों तथा ब्याज की सारणियों से उदाहरण लेकर सीखेंगे कि गणितीय सारणियों का किस प्रकार उपयोग किया जाता है।

संख्या n	वर्ग n^2	घन n^3	वर्गमूल $\sqrt{n}$	घनमूल $\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1.000	1.000
2	4	8	1.414	1.259
3	9	27	1.732	1.442
4	16	64	2.000	1.587
5	25	125	2.236	1.709
6	36	216	2.449	1.817
7	49	343	2.645	1.912
8	64	512	2.828	2.000
9	81	729	3.000	2.080
10	100	1000	3.162	2 154
11	121	1331	3.316	2.223
12	144	1728	3.464	2.289
13	169	2197	3.605	2.351
14	196	2744	3.741	2.410
15	225	3375	3.872	2.466
16	256	4096	4.000	2.519
17	289	4913	4.123	2 571
18	324	5832	4.242	2.620
19	361	6859	4.358	2.668
20	400	8000	4.472	2.714
21	441	9261	4.582	2.758
22	484	10648	4.690	2.802
23	529	12167	4.795	2.843
24	576	13824	4.898	2.884
25	625	15625	5.000	2.924

सारणी 6.1 : 1 से 25 तक के सभी धनपूर्णांकों के वर्गों, घनों, वर्गमूलों और घनमूलों के मानों की सारणी। वर्गमूलों और घनमूलों के स्तम्भों में मान दशमलव के तीन स्थानों तक दिए गए हैं।

6.2 धनपूर्णांकों के वर्ग, घन, वर्गमूल और घनमूल परिकलित करने में सारणियों का उपयोग

आइए सारणी 6.1 का अवलोकन करें। यह धनपूर्णांक n के n=1 से n=25 तक के मानों के लिए बारलो की सारणियों एक अंश है। बारलो

की सारणियों में $\frac{1}{n}$ और $\frac{1}{\sqrt{n}}$ तथा कुछ अन्य स्थिरांकों के भी मान दिए होते हैं। घनपूर्णांकों पर अंकगणितीय संक्रियाओं से संबद्ध किसी विस्तृत परिकलन के लिए, हम बारलो की मुख्य सारणियों या अन्य इसी प्रकार की सारणियों का प्रयोग कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि पहले स्तम्भ में 1 से 25 तक के धनपूर्णांक दिए हैं। दूसरे, तीसरे, चौथे और पाँचवे स्तम्भों में क्रमशः इनके सम्मुख वर्ग, घन, वर्गमूल और घनमूल दिए हैं। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस सारणी का उपयोग करना सीखेगे।

उदाहरण 1 : $(13)^3$ ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम स्तम्भ में 13 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा के अनुदिश चलते हैं जिसमें 13 सम्मिलित है तथा इस पंक्ति में घनों के स्तम्भ में लिखी प्रविष्टि (entry) खोजते हैं। हम देखते हैं कि वहां प्रविष्टि 2197 है। अतः,

$$(13)^3 = 2197$$

उदाहरण 2 : $\sqrt{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम पहले स्तम्भ में संख्या 5 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा के अनुदिश चलते हैं जिसमें 5 सम्मिलित है तथा इस पंक्ति में वर्गमूलों के स्तम्भ में लिखी प्रविष्टि खोजते हैं। हमें ज्ञात होता है कि वहाँ प्रविष्टि 2.236 है। अतः,

$$\sqrt{5} = 2.236$$

उदाहरण 3 : $\sqrt[3]{16}$ ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम पहले स्तम्भ में संख्या 16 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा के अनुदिश चलते हैं जिसमें 16 सम्मिलित है तथा इस पंक्ति में घनमूलों के स्तम्भ में लिखी प्रविष्टि खोजते हैं। हमें ज्ञात होता है कि यह प्रविष्टि 2.519 है। अतः,

$$\sqrt[3]{16} = 2.519$$

प्रश्नावली 6.1

सारणी 6.1 का उपयोग कीजिए और निम्न ज्ञात कीजिए :

1. 19 का वर्ग
2. 23 का वर्ग
3. 11 का घन
4. 17 का घन
5. 24 का घन
6. 7 का वर्गमूल
7. 18 का वर्गमूल
8. 21 का वर्गमूल
9. 12 का घनमूल
10. 15 का घनमूल

6.3 ब्याज की सारणियों का उपयोग

हम जानते हैं कि जब हम किसी बैंक या डाकघर में बचत बैंक खाते (Savings Bank Account) में धन जमा कराते हैं तो बैंक या डाकघर हमें जमा की गई धनराशि के साथ उस राशि पर ब्याज (interest) भी देता है। अब ब्याज की राशि जमा की गई धनराशि, ब्याज की दर तथा उस समय पर निर्भर करती है जिसके लिए वह राशि जमा रहती है। यह ब्याज सभी जमा कराने वालों के लिए प्रायः वर्ष में एक बार उनके खातों में एक ही समय जोड़ दिया जाता है या यह उस समय जोड़ा जाता है जब जमा कराने वाला अपनी जमा की गई सम्पूर्ण राशि बैंक से निकालता है। किसी भी बैंक या डाकघर में प्रत्येक वर्ष एक बहुत बड़ी संख्या में ब्याज के परिकलन करने पड़ते हैं। वर्ष में कई बार रुपया जमा कराने और निकालने से ये परिकलन और जटिल हो जाते हैं। यदि ये परिकलन प्रत्येक खाते की स्थिति में अलग से किए जाएँ तो बहुत ही कठिनाई होगी। इस कठिनाई से बहुत कुछ बचने के लिये, अब विभिन्न ब्याज की दरों, उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ प्रतिशत के अन्तराल (interval) पर 1 प्रतिशत से 10 प्रतिशत तक, भिन्न-भिन्न राशियों पर एक वर्ष के लिए ब्याज सदा के लिए एक बार परिकलित कर लिए गए हैं और इन्हें **ब्याज की सारणियों (interest tables)** के रूप में छपवा दिया गया है। इन सारणियों की सहायता से, बैंक अधिकारी प्रत्येक जमाकर्त्ता का ब्याज तुरन्त परिकलित कर सकता है।

आइए सारणी 6.2 का अवलोकन करें।

दर धनराशि	4%		4½%		5%	
	रु०	पै०	रु०	पै०	रु०	पै०
रु० 1	...	04	...	05	...	05
2	...	08	...	09	...	10
3	...	12	...	14	...	15
4	...	16	...	18	...	20
5	...	20	...	23	...	25
6	...	24	...	27	...	30
7	...	28	..	32	...	35
8	...	32	...	36	...	40
9	...	36	...	41	...	45
10	...	40	...	45	..	50
20	.	80	.	90	1	00
30	1	20	1	35	1	50
40	1	60	1	80	2	00
50	2	00	2	25	2	50
60	2	40	2	70	3	00
70	2	80	3	15	3	50
80	3	20	3	60	4	00
90	3	60	4	05	4	50
100	4	00	4	50	5	00
200	8	00	9	00	10	00
300	12	00	13	50	15	00
400	16	00	18	00	20	00
500	20	00	22	50	25	00
600	24	00	27	00	30	00
700	28	00	31	50	35	00
800	32	00	36	00	40	00
900	36	00	40	50	45	00
1000	40	00	45	00	50	00

सारणी 6.2 : वार्षिक ब्याज की सारणी।

ध्यान दीजिए कि पहला स्तम्भ रुपयों में धनराशि दर्शाता है, दूसरे स्तम्भ से 4% वार्षिक दर पर ब्याज प्राप्त होता है, तीसरे स्तम्भ से 4½% वार्षिक दर पर ब्याज प्राप्त होता है जबकि चौथे स्तम्भ से 5% वार्षिक दर पर ब्याज प्राप्त होता है।

उदाहरण 4: 5% वार्षिक दर पर 60 रु० का वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हम पहले स्तम्भ में 60 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा में, जिसमें 60 सम्मिलित है, 5% के स्तम्भ में प्रविष्टि खोजते हैं। इस प्रविष्टि से हमें 3 रु० प्राप्त होते हैं। अत: 5% वार्षिक दर पर 60 रु० का वार्षिक ब्याज 3 रु० है।

उदाहरण 5: $4\frac{1}{2}$% वार्षिक दर पर 300 रु० का वार्षिक ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : हम पहले स्तम्भ में 300 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा में, जिसमें 300 सम्मिलित है, $4\frac{1}{2}$% के स्तम्भ में प्रविष्टि खोजते हैं। इस प्रविष्टि से हमें 13 रु० 50 पैसे प्राप्त होते हैं। अत:, $4\frac{1}{2}$% वार्षिक दर पर 300 रु० का वार्षिक ब्याज 13 रु० 50 पैसे है।

उदाहरण 6: 5% वार्षिक दर पर 80 रु० का 4 महीने का ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : हम पहले स्तम्भ में 80 खोजते हैं। फिर हम उस क्षैतिज रेखा में, जिसमें 80 सम्मिलित है, 5% के स्तम्भ में प्रविष्टि खोजते हैं। इस प्रविष्टि से हमें 4रु० प्राप्त होते हैं।

इसलिए 80 रु० का एक वर्ष का ब्याज = 400 पैसे

अत:, 80 रु० का 4 महीने का ब्याज $= \left(\frac{400 \times 4}{12}\right)$ पैसे

$$= \frac{400}{3} \text{ पैसे} = 133 \text{ पैसे (लगभग)}$$

इस प्रकार, 5% वार्षिक दर पर 80 रु० का 4 महीने का ब्याज 1 रु० 33 पैसे है।

टिप्पणी : सारणी 6.2, 4%, $4\frac{1}{2}$% और 5% वार्षिक दर पर ब्याज प्रदान करती है। इस सारणी से हमें सीधे 150रु० का 10% वार्षिक दर पर ब्याज प्राप्त नहीं होता क्योंकि यह सारणी अपूर्ण है। परन्तु ऐसी सारणियाँ भी हैं जो हमें अन्य दरों पर भिन्न-भिन्न राशियों के ब्याज प्रदान करती हैं।

अनेक अन्य प्रकार की सारणियाँ भी उपलब्ध हैं। हम इनमें से दो नीचे दे रहे हैं।

(1) **बीमा किश्त सारणियाँ (Insurance Premium Tables) :** ये सारणियाँ भिन्न-भिन्न समय काल के लिए भिन्न-भिन्न राशि का बीमा कराने में वार्षिक देय किश्तों की राशियाँ प्रदान करती हैं।

(2) **परिवर्तन सारणियाँ (Conversion Tables) :** इन सारणियों से, हम एक ही राशि को मापने के लिए एक पद्धति के मात्रकों को दूसरी पद्धति के मात्रकों में परिवर्तित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम इन सारणियों का उपयोग लम्बाई की माप को पुरानी पद्धति से मैट्रिक पद्धति में और विलोमतः मैट्रिक पद्धति से पुरानी पद्धति में परिवर्तित करने के लिए कर सकते हैं।

प्रश्नावली 6.2

सारणी 6.2 का उपयोग कीजिए और निम्न वार्षिक ब्याज परिकलित कीजिए :

1. 50रु० का 4% वार्षिक दर पर
2. 90 रु० का $4\frac{1}{2}$% वार्षिक दर पर
3. 400 रु० का 5% वार्षिक दर पर
4. 500 रु० का $4\frac{1}{2}$% वार्षिक दर पर
5. 5% वार्षिक दर पर 70 रु० का 11 महीने का ब्याज परिकलित कीजिए।
6. 4% वार्षिक दर पर 300 रु० का 3 महीने का ब्याज परिकलित कीजिए।

एकक VII

समुच्चय

इस एकक में, हम समुच्चयों (sets), समुच्चय संकेतन (set notation) और समुच्चयों पर कुछ संक्रियाओं के बारे में पढ़ेंगे। हम समुच्चयों को चित्रीय रूप से निरूपित करना भी सीखेंगे।

7.1 समुच्चय

आजकल समुच्चयों और समुच्चय भाषा (set language) ने गणित में एक महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त कर लिया है। ये हमारी अनेक धारणाओं और संकल्पनाओं को एक स्पष्ट और सुन्दर रूप में व्यक्त करने में हमारी सहायता करते हैं। हम सभी को इस बात की एक अंतर्ज्ञानात्मक धारणा (intuitive notion) है कि दैनिक जीवन की भाषा में एक संग्रह (collection), एक समूह (group), एक समुदाय (aggregate) अथवा वस्तुओं के एक सेट या समच्चय (set) से हमारा क्या तात्पर्य है। आइए अब, यह खोजने के लिए कि एक समुच्चय की गणितीय धारणा (mathematical notion) में हम किन विशेषताओं की अपेक्षा करते हैं, संग्रहों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें :

1. आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थी।
2. एक परिवार जिसमें एक आदमी, उसकी पत्नी, उनके दो पुत्र और एक पुत्री सम्मिलित हैं।
3. आपके गाँव की सभी भैंसे।
4. अंग्रेजी वर्णमाला के सभी अक्षर।
5. 2 से बड़े परन्तु 10 से छोटे सभी धनपूर्णांक।
6. सम धनपूर्णांक।

7. किसी स्कूल की लाइब्रेरी में बहुत ही रूचिपूर्ण पाँच पुस्तकें।
8. शब्द 'SCHOOL' में अक्षर।
9. शब्द 'COMMITTEE' में अक्षर।
10. भारत के सबसे अधिक शक्तिशाली तीन आदमी।

आइए उदाहरण 1 को देखें। क्या हम यह निश्चित रूप से जानते हैं कौन इस संग्रह का अंग है और कौन नहीं है ? हाँ, हम जानते हैं। क्योंकि किसी को इस संग्रह का अंग होने के लिए, सर्वप्रथम एक विद्यार्थी होना चाहिए और फिर उस कक्षा में विद्यार्थी होना चाहिए जिसमें आप है। क्या आप स्वयं इस संग्रह का एक अंग हैं ? हाँ, आप हैं। **अतः हम जानते हैं कि कौन इस संग्रह का अंग है और कौन नहीं।** साथ ही, हम देखते हैं कि इस संग्रह में सभी सदस्य भिन्न **(different या distinct)** हैं।

क्या हम यही बात अन्य सभी संग्रहों के बारे में कह सकते हैं ? आइए जाँच करें। उदाहरण 2 में, हम निश्चित रूप से जानते हैं कि कौन उस परिवार का अंग है और कौन नहीं। साथ ही, सभी सदस्य भिन्न हैं। स्पष्ट है कि उदाहरण 3 से 6 तक के संग्रहों के बारे में भी यही बात कही जा सकती है। परन्तु उदाहरण 7 के बारे में आप क्या सोचते हैं ? क्या हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि स्कूल लाइब्रेरी में सबसे अधिक रूचिपूर्ण पुस्तकें कौन-सी हैं ? नहीं क्योंकि जो पुस्तक एक व्यक्ति को रूचिपूर्ण लगती है, हो सकता है कि दूसरे व्यक्ति को रूचिपूर्ण न लगे। इस प्रकार उदाहरण 7 में संग्रह **स्पष्ट रूप से निर्धारित (well determined)** अथवा **सुपरिभाषित (well-defined)** नहीं है। स्पष्ट है कि ऐसे संग्रह में हम अधिक कुछ नहीं कर सकते क्योंकि हम निश्चित रूप से नहीं जानते कि कौन इसका अंग है और कौन नहीं। उदाहरण 10 भी इसी प्रकार का है। (क्यों ?) ऐसे संग्रहों को गणित में समुच्चय नहीं समझा जाता है।

अब, आइए उदाहरण 8 को देखें। शब्द SCHOOL में छः अक्षर S, C, H, O, O, L हैं। यद्यपि यदि वर्णमाला का कोई भी अक्षर दिया है तो हम तुरन्त कह सकते हैं वह इस संग्रह का अंग है या नहीं, परन्तु इसमें अक्षर O दो बार आता है। जब एक संग्रह में कोई वस्तु एक से अधिक बार आती है तो यह सुविधाजनक पाया गया है कि उसे केवल एक बार अर्थात् केवल एक

वस्तु गिना जाए, और यह नहीं कि वह जितनी बार आए उतनी ही बार गिना जाए। इस कल्पना के साथ ऐसे संग्रह में भी वस्तुएँ भिन्न हो जाती हैं। इस प्रकार, शब्द SCHOOL के अक्षरों के संग्रह में केवल पाँच अक्षर S, C, H, O, L सम्मिलित होंगे।

पुन:, उदाहरण 9 में, शब्द COMMITTEE के अक्षरों के संग्रह में केवल छ: भिन्न अक्षर C, O, M, I, T, E सम्मिलित हैं। यह भी देखा जा सकता है कि इस प्रकार हम संग्रहों जैसे कि C, O, M, M, I, T, T, E, E और C, O, M, I, T, E को एक समान मान रहे हैं।

उपर्युक्त को दृष्टिगत रखते हुए, हम कहते हैं कि

एक समुच्चय से हमारा तात्पर्य होगा भिन्न वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह। इस प्रकार, ऊपर 1 से 6 और 8, 9 समुच्चयों के उदाहरण हैं।

वे वस्तुएँ जो किसी समुच्चय की अंग हैं उस समुच्चय के **सदस्य (members)** या **अवयव (elements)** कहलाते हैं।

यद्यपि एक समुच्चय के अवयव प्राय: एक ही प्रकार की वस्तुएँ होती हैं, परन्तु यह होना आवश्यक नहीं है। वे भिन्न प्रकार की भी हो सकती हैं। उदाहरणार्थ, हमें एक ऐसा समुच्चय भी प्राप्त हो सकता है जिसमें एक घोड़ा, एक गाड़ी और एक आदमी सम्मिलित हो। साथ ही, हमें समुच्चयों के अवयवों के रूप में भी समुच्चय प्राप्त हो सकते हैं। हम अधिकतर अपना संबंध उन समुच्चयों से रखेंगे जिनके अवयव संख्याएँ हैं। समुच्चयों की एक अन्य श्रेणी जिसका हम अध्ययन करेंगे बिंदुओं के समुच्चयों (sets of points) की है। हम समुच्चयों के कुछ और उदाहरण देते हैं।

11. भारत के सभी नागरिक।

12. एक दी हुई रेखा पर स्थित बिंदु।

13. एक दिए हुए वृत्त पर स्थित सभी बिंदु।

14. सभी पूर्णांक।

15. सभी वास्तविक संख्याएँ।

16. शब्द 'SUCCESS' के अक्षरों का समुच्चय।

ध्यान दीजिए कि, उदाहरणों 8 और 9 में स्पष्ट की गई परिपाटी के अनुसार, इस समुच्चय में केवल चार अक्षर S, U, C, E सम्मिलित हैं।

प्रश्नावली 7 1

निम्न में से कौन-कौन समुच्चय हैं ? जो नहीं हैं, उनके कारण बताइए।

1. किसी बाग में आमों के सभी पेड़ों का संग्रह।
2. आपके स्कूल में पाँच सबसे अधिक लोकप्रिय अध्यापकों का संग्रह।
3. आपके स्कूल में सभी लड़कियों का संग्रह।
4. विश्व में पाँच सबसे कमजोर राष्ट्रों का संग्रह।
5. सभी वास्तविक संख्याओं का संग्रह।
6. 1 से 100 तक सभी विषम पूर्णांकों का संग्रह।
7. एक तल में सभी वृत्तों का संग्रह।
8. एक तल में सभी समबाहु त्रिभुजों का संग्रह।
9. आपके शरीर पर सभी बालों का संग्रह।
10. समूचे विश्व में रेत के सभी दानों का संग्रह।

7.2 संकेतन : समुच्चय को व्यक्त करने की विधियाँ

समुच्चय प्राय: अंग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C, X, Y इत्यादि से व्यक्त किए जाते हैं। इनके अवयव छोटे अक्षरों a, b, c इत्यादि से व्यक्त किए जाते हैं।

मान लीजिए A एक अंक के सभी धनपूर्णांकों का समुच्चय है। तब 4 इस समुच्चय का एक अंग है या 4 इस समुच्चय का एक अवयव है। संकेतों में हम इसे निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं :

$4 \in A$ और इसे '4, A का एक अंग है।' पढ़ते हैं। संकेत $\in$ शब्दों 'का एक अंग है' या 'का एक अवयव है' के लिए प्रयुक्त होता है। स्पष्ट है, 10 इस समुच्चय का एक अंग नहीं है। हम इस तथ्य को व्यक्त करने के लिए संकेतन $10 \notin A$ का प्रयोग करते हैं और इसे '10, A का एक अंग नहीं है' पढ़ते हैं।

व्यापक रूप में, यदि कोई अवयव a एक समुच्चय A का एक अंग है, तो हम $a \in A$ लिखते हैं और यदि वह नहीं है तो हम $a \notin A$ लिखते हैं।

समुच्चयों को व्यक्त करने के लिए हमें कुछ संकेतनों की आवश्यकता है। समुच्चयों को व्यक्त करने की दो विधियाँ हैं।

1. सारणीबद्ध विधि (Tabular Method) :

इस विधि में हम समुच्चय के सदस्यों को अर्धविरामों से पृथक करते हुए लिखते हैं तथा उन्हें मंझले कोष्ठकों (braces) अथवा लहरियादार कोष्ठकों (Curvilinear brackets) में बन्द कर देते हैं। इस प्रकार यदि 1 से 10 तक के एक अंक के सभी विषम पूर्णांकों का समुच्चय A है तो इसके अवयव 1, 3, 5, 7, 9, हैं। और हम इस समुच्चय को सारणीबद्ध रूप (Tabular form) में निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

पुनः, अनुच्छेद 7.1 के उदाहरणों 2, 4, 5, 8 के समुच्चयों को उपर्युक्त रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

2. {आदमी, पत्नी, प्रथम पुत्र, द्वितीय पुत्र, पुत्री}
4. {a, b, c, d, . . . x, y, z}...वो अक्षर दर्शाते हैं जो नहीं लिखे गए हैं।
5. {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,}
8. {S, C, H, O, L}

समुच्चय का सारणीबद्ध रूप तालिका रूप (roster form) भी कहलाता है क्योंकि इसमें सभी अवयवों की एक सूची बनाई जाती है अथवा जो यह कहने के समान है कि अवयवों की एक तालिका दी जाती है। इस विधि का एक लाभ है। वह यह कि कोई भी व्यक्ति समुच्चय के अवयवों को प्रत्यक्ष रूप से देख सकता है और, इस प्रकार, सम्पूर्ण रूप में उस समुच्चय को ही देख सकता है। परन्तु यह विधि तब उपयोगी नहीं रहती जब समुच्चय के सदस्यों की संख्या बहुत बड़ी होती है या जब समुच्चय की सदस्यता से संबद्ध नियम द्वारा सभी सदस्यों को लिखना सम्भव नहीं होता।

यहाँ हम यह कह सकते हैं कि समुच्चय के अवयवों को किसी भी क्रम में लिखने से उस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस प्रकार, निम्न समुच्चय एक ही समान हैं :

{a, b, c}, {c, a, b}, {b, c, a}

समुच्चय निर्माण विधि (Set builder Method) : जब एक समुच्चय के अवयव एक उभयनिष्ठ गुण या नियम द्वारा दिए जाते हैं, तो हम समुच्चय के एक प्रतिरूपी सदस्य (typical member) को x, y इत्यादि से व्यक्त करते हैं, इसके बाद नियम का कथन लिखते हैं और इन सबको पहले की तरह लहरियादार कोष्ठकों में बन्द कर देते हैं। इस प्रकार, यदि सभी पूर्णांकों का समुच्चय A है, तो हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

A={x | x एक पूर्णांक है}

इसे 'सभी x का समुच्चय ताकि x एक पूर्णांक है' पढ़ा जाता है। इस रूप में, हम यह मान सकते हैं कि पहले कोष्ठक '{' का अर्थ है 'सभी का समुच्चय', खड़ी रेखा '|' का अर्थ है 'ताकि' तथा अंतिम कोष्ठक '}' को सममिति के लिए जोड़ दिया गया है। कभी कभी '|' के स्थान पर कोलन (colon) ':' का भी प्रयोग किया जाता है।

अनुच्छेद 7.1 के उदाहरणों 5, 6, 15 के समुच्चयों को समुच्चय-निर्माण रूप (set builder form) में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

5. {x | x एक धनपूर्णांक है तथा $2<x<10$}
6. {n | n एक सम धनपूर्णांक है}
15. {x | x एक वास्तविक संख्या है}

चूँकि समुच्चय को इस रूप में व्यक्त करने में उस समुच्चय को परिभाषित करने वाला नियम लिखा जाता है, अतः यह रूप **नियम रूप (rule form)** भी कहलाता है।

प्रश्नावली 7.2

1. मान लीजिए A={x | x एक धनपूर्णांक है और 7 का एक गुणज है}

   (क) A के वे अवयव लिखिए जो 50 से छोटे हैं।

   (ख) निम्न में डैश (dash) द्वारा निरूपित रिक्त स्थानों में उपयुक्त संकेत ∉ या ∈ भरिए :

(i) 5—A (ii) 13—A (iii) 51—A
(iv) 21—A (v) 84—A (vi) 28—A
(vii) O—A (viii) 7—A (ix) 35—A

2. निम्न समुच्चयों को सारणीबद्ध रूप में लिखिए :
   (i) $A=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $-5<x\leqslant 4\}$
   (ii) $B=\{x \mid x$ दो अंकों का एक धनपूर्णांक है जिसके अंकों का योग 7 है$\}$
   (iii) $C=\{x \mid x=o$ या $x=1\}$
   (iv) $D=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $3\leqslant x<15\}$
   (v) शब्द INDIA में सभी अक्षरों का समुच्चय।
3. निम्न समुच्चयों को समुच्चय-निर्माण रूप में लिखिए :
   (i) {a, e, i, o, u}
   (ii) {—3, —2, —1, 0, 1, 2}
   (iii) {4, 8, 12, 16, 20, 24}
   (iv) {1, 4, 9, 16, 25, 36,...}

7.3 परिमित और अपरिमित समुच्चय : रिक्त समुच्चय

अनेक समुच्चयों में, अवयवों की संख्या को गिना जा सकता है। उदाहरणार्थ, अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों के समुच्चय में 26 अवयव a, b, c,... x,y,z हैं। अनुच्छेद 7.1 के उदाहरणों 2 और 5 के समुच्चयों में क्रमशः 5 और 7 अवयव हैं। उदाहरणों 1, 3 और 11 में अवयवों की संख्या तुरन्त नहीं बताई जा सकती। परन्तु इन अवयवों को गिना जा सकता है और हम यह विश्वस्त हो सकते हैं कि वह एक निश्चित संख्या है। ये सभी **परिमित समुच्चयों (finite sets)** के उदाहरण हैं। **एक परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।**

वह समुच्चय जो परिमित नहीं है **अपरिमित समुच्चय (infinite set)** कहलाता है। ऐसे समुच्चय में अवयवों की संख्या को किसी धनात्मक पूर्णांक

से व्यक्त नहीं किया जा सकता। क्या आप देख सकते हैं कि उदाहरणों 6, 12 से 15 में समुच्चय अपरिमित हैं ? उदाहरण 6 में हम अवयवों को पहला, दूसरा, तीसरा इत्यादि गिन सकते है परन्तु इस गिनने की प्रक्रिया का कहीं अंत नहीं होता। अन्य उदाहरणों में, इतना भी नहीं किया जा सकता। क्यों ? क्या आपको यह गुण याद है कि दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के बीच जितनी हम चाहें उतनी वास्तविक संख्याएँ स्थित होती हैं ?

कभी-कभी समुच्चय के अवयवों को निर्धारित करने वाला नियम ऐसा हो सकता है कि उस नियम में दिए प्रतिबन्ध को कोई भी वस्तु संतुष्ट न करे। उदाहरणार्थ, ऐसे सभी धनपूर्णांकों के समुच्चय पर विचार कीजिए जो 5 से छोटे हैं और साथ ही 6 से बड़े है। स्पष्ट है, ऐसा कोई धनपूर्णांक नहीं है। अतः समुच्चय में कोई अवयव नहीं है। हम सरलता से कह सकते हैं कि ऐसा कोई समुच्चय नहीं है जो दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। परन्तु यह कहना सुविधाजनक पाया गया है कि यह भी एक समुच्चय है परन्तु इसमें कोई अवयव नहीं है। यह रिक्त **समुच्चय (the empty set या the null set)** कहलाता है। जब भी किसी समुच्चय के अवयवों को निर्धारित करने वाले नियम में स्वयं कोई विरोधाभास सम्बद्ध रहता है, हमें रिक्त समुच्चय प्राप्त हो जाता है। हम रिक्त समुच्चय को संकेत ϕ से व्यक्त करते हैं कभी-कभी रिक्त समुच्चय को व्यक्त करने के लिए संकेत '{ }' का भी प्रयोग किया जाता है जिसमें कोष्ठकों के बीच में कुछ नहीं लिखा जाता।

ऐसा समुच्चय जिसमें केवल एक ही (single) अवयव होता है कभी-कभी एकल समुच्चय (singleton set) कहलाता है। इसके उदाहरण निम्न हैं :

{सूर्य}, {पृथ्वी}, {5}, {6}, इत्यादि।

आप अन्य उदाहरणों के बारे में सोच सकते हैं।

प्रश्नावली 7.3

1. निम्न में से कौन-कौन परिमित समुच्चय हैं तथा कौन-कौन अपरिमित समुच्चय हैं ?
   (i) 64 के सभी विभाजकों का समुच्चय।
   (ii) 4 के गुणजों का समुच्चय।

(iii) ऐसे सभी धनपूर्णांकों का समुच्चय जिनमें इकाई के स्थान पर 6 है।

(iv) 6 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

(v) —50 और 50 के बीच पूर्णांकों का समुच्चय।

(vi) {x | x एक धनपूर्णांक का घन है और $x \leq 1000$}

2 निम्न में से कौन रिक्त समुच्चय हैं ?

(i) आपके स्कूल की लाइब्रेरी में गणित की पुस्तकों का समुच्चय।

(ii) { x | x एक पूर्णांक है और $2x = -3$ }

(iii) { x | x एक सम अभाज्य संख्या है }

7.4 समुच्चयों की समानता : उपसमुच्चय

अब हम समुच्चयों के बीच कुछ संबंधों के बारे में पढ़ेंगे।

समुच्चयों की समानता: दो समुच्चय समान (equal) कहे जाते हैं यदि उनके अवयव एक ही हों।

इस प्रकार समानता की व्याख्या एक ही पन के अर्थ में की गई है। संख्याओं की तरह हम समुच्चयों की समानता के लिए संकेत '=' का प्रयोग करते हैं। हम समान समुच्चयों के कुछ उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 1 : {a, b, c}={ b, a, c }

उदाहरण 2 : यदि $A=\{ x \mid x=n^2$, n एक धनपूर्णांक है$\}$ तथा B={ 1, 4, 9, 16, 25,...}, जहाँ बिंदियाँ बाद में आने वाले पूर्ण वर्ग धनपूर्णांक दर्शाती हैं, तो A=B है।

क्या आप देख सकते हैं कि **जब दो समुच्चय समान हैं तो पहले का प्रत्येक अवयव दूसरे का एक अवयव है और विलोमतः दूसरे का प्रत्येक अवयव पहले का एक अवयव है ?**

उपसमुच्चय (Subsets)

संबंधों 'से बड़ा है' (greater than) और 'से छोटा है' (less than) के स्थान पर हम अब **एक समुच्चय का दूसरे समुच्चय का उपसमुच्चय होने वाला संबंध** प्राप्त करेंगे। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : समुच्चयों

$A = \{ a, b, c, d, e, f \}$ और $B = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$ को लीजिए।

हम देखते हैं कि A का प्रत्येक अवयव B का भी एक अवयव है।

उदाहरण 4 : समुच्चयों $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ और $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ को लीजिए।

पुनः, A का प्रत्येक अवयव B का भी एक अवयव है।

इन दोनों उदाहरणों में, हम कहते हैं कि **A, B का एक उपसमुच्चय है**। इन उदाहरणों में, B में ऐसे भी अवयव हैं जो A में नहीं हैं। यह सदैव आवश्यक नहीं है। A को B का एक उपसमुच्चय बनाने के लिए जो आवश्यक है वह यह है कि A के प्रत्येक अवयव को B का भी एक अवयव होना चाहिए। अतः हम कहते हैं कि

समुच्चय A समुच्चय B का एक उपसमुच्चय है यदि, A का प्रत्येक अवयव B का एक अवयव है। हम संकेतों में इसे निम्न प्रकार लिखते हैं

$$A \subset B$$

और इसे **'A, B का एक उपसमुच्चय है'**, या **'A, B में अंतर्विष्ट (contained)** है' पढ़ते हैं। संकेत $\subset$ **अंतर्वेश (inclusion)** संकेत भी कहलाता है।

जब A, B का एक उपसमुच्चय होता है, तो कभी कभी हम कहते हैं कि **'B, A का एक अधिसमुच्चय (superset) है'**। हम संकेतों में इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$B \supset A$$

और इसे **'B, A को अंतर्विष्ट किए है'** पढ़ते हैं।

टिप्पणियाँ : 1. ध्यान दीजिए कि प्रत्येक समुच्चय को स्वयं उसी का एक उपसमुच्चय समझा जा सकता है। इस प्रकार, संकेतों में

$A \subset A$ **प्रत्येक A के लिए सत्य है।**

2. रिक्त समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता, अतः उसे प्रत्येक समुच्चय का एक उपसमुच्चय समझा जा सकता है। इस प्रकार, संकेतों में

$\phi \subset A$ **प्रत्येक A के लिए सत्य है।**

3. हम देखते हैं कि जब x, A का एक अवयव है तो '$x \in A$' के लिए हम '$x \subset A$' नहीं लिख सकते।

4. क्या आप देख सकते हैं कि संकेत $\subset$ और $\supset$ बड़े किए हुए और गोल किए हुए < और > जैसे लगते हैं? क्या इससे इनकी उत्पत्ति के बारे में आपको कुछ अनुमान प्राप्त होता है?

अब हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5 : समुच्चयों $A=\{a, b, c, e, f\}$ और $B=\{c, d, e, f, g, h\}$ को लीजिए। क्या A का प्रत्येक अवयव B का एक अवयव है? नहीं। अत: A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है। क्या आप जाँच कर सकते हैं कि B भी A का एक उपसमुच्चय नहीं है?

जब एक समुच्चय A किसी समुच्चय B का एक उपसमुच्चय नहीं होता तो हम इसे संकेतों में $A \not\subset B$ लिखते हैं और इसे 'A, B में अंतर्विष्ट नहीं है' या 'A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है' पढ़ते हैं। यहाँ, $A \not\subset B$ तथा $B \not\subset A$ है।

उदाहरण 6 : यदि $A \subset B$ और $B \subset A$ हो, तो $A=B$ होता है।

हल : क्योंकि, यदि A का प्रत्येक अवयव B का एक अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का एक अवयव है, तो A और B के अवयव एक ही होने चाहिए। अत: $A=B$

इसका विलोम भी सत्य है। क्या आप इसे देख सकते हैं?

7.4.1 समष्टीय समुच्चय

समुच्चयों से संबद्ध चर्चाओं में, प्राय: ऐसा होता है कि सभी विचाराधीन समुच्चय एक बड़े समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं। तब यह बड़ा समुच्चय, जिसके अन्य सभी समुच्चय उपसमुच्चय हैं, उस समय की चर्चा के लिए, **समष्टीय समुच्चय (the universal set)** या **वार्तालाप का विश्व (समष्टि) (universe of discourse)** कहलाता है। उदाहरणार्थ, यदि हम अपने देश की जनगणना का अध्ययन कर रहे हैं तो समष्टीय समुच्चय हमारे देश के सभी नागरिकों का समुच्चय है। पुन: यदि हम एक रेखा पर स्थित बिंदुओं की चर्चा कर रहे हैं तो हमारा समष्टीय समुच्चय उस रेखा पर स्थित सभी बिंदुओं का समुच्चय है। यदि हम वास्तविक संख्याओं के साथ कार्य कर रहे हैं, तो हमारा समष्टीय समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। ऐसी सभी चर्चाओं में, समष्टीय समुच्चय या तो स्पष्ट रूप से या अस्पष्ट रूप से पहले ही दिया होता है।

उदाहरण 7 : $\{1, 2, 3\}$ के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

हल : उपसमुच्चय बनाने में, हम इसके अवयवों में से एक बार में एक या एक बार में दो या सभी तीन ले सकते हैं। इस प्रकार, हमें निम्न उपसमुच्चय प्राप्त होते हैं :

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$ ये संख्या में 7 हैं। साथ ही, हमने मान लिया है रिक्त समुच्चय ϕ प्रत्येक समुच्चय का एक

उपसमुच्चय होता है। हम पहले सात लिखे हुए उपसमुच्चयों में इसे और जोड़ देते हैं और आठ उपसमुच्चय प्राप्त करते हैं।

प्रश्नावली 7.4

1. मान लीजिए $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y=\{0, -1, 2, -2, 1\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-3, -1, 2\}$, $C=\{-1, 1, 0\}$, $D=\{-1, 1, 2\}$, $E=\{-2, -1\}$ हैं।

   (i) समुच्चयों Y, A, B, C, D, E में से कौन-कौन A के उपसमुच्चय हैं?

   (ii) क्या समुच्चय X और Y समान हैं?

   निम्न समुच्चयों के सभी उपसमुच्चयों को लिखिए :

2. $\{-1, 1\}$ 3. $\{0, 1, 2\}$ 4. $\{a, b, c, d\}$

5. प्रश्नों 2, 3 और 4 में दिए समुच्चयों में से प्रत्येक के कितने उपसमुच्चय हैं?

6. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं और कौन-कौन से असत्य?

   (i) $a\in\{c, f, j\}$ (ii) $\{a\}\subset\{a, b, c\}$

   (iii) $\{a\}\supset\{a\}$ (iv) $\{0, 1\}\in\{0, 1, 2\}$

   (v) $\{x, y, z\}\subset\{x, y\}$

7. क्या हम निम्न को उपसमुच्चय की एक परिभाषा के रूप में ले सकते हैं?

   A, B का एक उपसमुच्चय है यदि $x\in A$ होने पर $x\in B$ हो।

8. डैश द्वारा निरूपित रिक्त स्थानों में संकेत $\subset$ या $\not\subset$ भरिए ताकि निम्न कथन सत्य हों :

   (i) $\{-1, 0, 1\}$ — $\{-1, 0, 2\}$

   (ii) $\{-1, 0, 1\}$ — $\{0, -1, 1\}$

   (iii) {x | x एक सम धनपूर्णांक है} — {x | x एक पूर्णांक है}

   (iv) $\{1, 3, 6, 7\}$ — $\{3, 5, 7, 9, 6, 11\}$

7.5 समुच्चय संक्रियाएँ

अब हम समुच्चयों पर दो संक्रियाओं का उल्लेख कर रहे हैं जो वास्तविक संख्याओं के लिए योग और गुणन के स्थान लेती हैं। चूँकि ये संक्रियाएँ साधारण योग और गुणन से बहुत अधिक भिन्न हैं, अतः हम इनके लिए नये नामों और संकेतों का प्रयोग करेंगे।

इनमें से पहली **दो समुच्चयों के सम्मिलन (the union of two sets)** 'लेने' की संक्रिया है। जैसा कि आप जानते हैं सम्मिलन का अर्थ है दो वस्तुओं का एक साथ मिलाना। अतः दो समुच्चयों के लिए हम इसकी व्याख्या किस प्रकार करेंगे? आइए दो उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : समुच्चयों $A=\{1, 2, 3\}$ और $B=\{4, 5, 6, 7\}$ को लीजिए। यदि हम इनके सभी अवयवों को एक साथ मिलाकर एक ही समुच्चय में रखें तो हमें समुच्चय $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ प्राप्त होता है। क्या आप यह मानते हैं कि C वह समुच्चय है जो A और B को एक साथ मिलाने अथवा A और B के सम्मिलन से प्राप्त हुआ है?

उदाहरण 9 : अब समुच्चयों

$A=\{x \mid x$ एक वास्तविक संख्या है और $1<x<3\}$ तथा $B=\{x \mid x$ एक वास्तविक संख्या है और $2<x<4\}$ को लीजिए। यदि हम A और B के सभी अवयवों को एक साथ एक नये समुच्चय में रखें, तो हम देखते हैं कि हमें 1 और 4 के बीच की सभी वास्तविक संख्याएँ प्राप्त हो जाती हैं जिनमें संख्याओं $2<x<3$ में से प्रत्येक की एक बार पुनरावृत्ति होती है। चूँकि समुच्चयों में पुनरावृत्ति नहीं मानी जाती है, अतः हमें निम्न समुच्चय प्राप्त होता है :

$C=\{x \mid x$ एक वास्तविक संख्या है और $1<x<4\}$

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में समुच्चय C समुच्चयों A और B का **सम्मिलन समुच्चय (union set)** कहलाता है। इस प्रकार, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

समुच्चयों का सम्मिलन

दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन वह समुच्चय C है जिसमें वे सभी अवयव सम्मिलित हैं जो A में या B में या दोनों में हैं। हम इसे $C=A\cup B$ लिखते हैं और **A सम्मिलन B** पढ़ते हैं।

संकेतों में,

$C=A\cup B=\{x \mid x\in A$ या $x\in B$ या $x\in$ दोनों$\}$

समुच्चयों पर दूसरी संक्रिया **दो समुच्चयों का प्रतिच्छेदन या सर्वनिष्ठ (the intersection of two sets)** 'लेने' की है। शब्द प्रतिच्छेदन का अर्थ

है जहाँ दो वस्तुएँ मिलती हैं, जैसे कि दो सड़कों या दो रेखाओं या दो वृत्तों का प्रतिच्छेदन। दूसरे शब्दों में, हमें यह ज्ञात करना पड़ेगा कि दोनों समुच्चयों में क्या उभयनिष्ठ (सर्वनिष्ठ) है। आइए दो उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : समुच्चयों

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ को लीजिए।

इन दोनों समुच्चयों में क्या उभयनिष्ठ है ? स्पष्ट है, अवयव 4, 5, 6 उभयनिष्ठ हैं। इनसे समुच्चय $C=\{4, 5, 6\}$ बनता है। अत: A और B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय C है।

उदाहरण 11 : समुच्चयों

$A=\{a, b, c, d\}$ और $B=\{f, g, h, j, k\}$ को लीजिए।

अब दोनों समुच्चयों में क्या उभयनिष्ठ है ? स्पष्ट है, कुछ नहीं। अत: इनके उभनिष्ठ अवयवों से बना समुच्चय क्या है ? यह समुच्चय $C=\phi$ है।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में, समुच्चय C समुच्चयों A और B का **सर्वनिष्ठ समुच्चय (intersection set)** कहलाता है। इस प्रकार, हमें निम्न प्राप्त होता है :

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ वह समुच्चय C है जिसमें वे सभी अवयव सम्मिलित हैं जो A के साथ-साथ B में भी हैं। यदि ऐसा कोई अवयव नहीं है, तो सर्वनिष्ठ रिक्त समुच्चय ϕ होता है

$C=A\cap B$ लिखते हैं और A सर्वनिष्ठ B पढ़ते हैं।

संकेतों में,

$C=A\cap B=\{x \mid x\in A$ और $x\in B\}$

अब हम कुछ और उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 12 : मान लीजिए

$A=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $3<x\leqslant 5\}$ तथा $B=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $4\leqslant x<8\}$ है। तब,

$A\cup B=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $3<x<8\}=\{4, 5, 6, 7\}$ और $A\cap B=\{x \mid x$ एक पूर्णांक है और $4\leqslant x\leqslant 5\}=\{4, 5\}$

उदाहरण 13 : यदि $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B=\{6, 7, 8\}$ है, तो $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

तथा $A\cap B=\phi$

जब दो समुच्चयों में कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं हो अर्थात् उनका सर्वनिष्ठ रिक्त समुच्चय हो, तो वे समुच्चय असंयुक्त समुच्चय **(disjoint sets)** कहे जाते हैं। इस प्रकार, उपर्युक्त उदाहरण 13 में दिए समुच्चय असंयुक्त हैं।

उदाहरण 14 : यदि A कोई समुच्चय है, तो उसका स्वयं के साथ सम्मिलन तथा स्वयं के साथ सर्वनिष्ठ दोनों ही स्पष्ट रूप से स्वयं A के समान है। इस प्रकार,

प्रत्येक समुच्चय A के लिए, $A \cup A = A$ तथा $A \cap A = A$

प्रश्नावली 7.5

1. मान लीजिए $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, -3\}$ तथा $C = \{2, 4, 6, 8\}$ है। ज्ञात कीजिए :
   (i) $A \cup B$ (ii) $B \cup C$ (iii) $C \cup A$ (iv) $A \cap B$
   (v) $B \cap C$ (vi) $C \cap A$ (vii) $(A \cup B) \cup C$
   (viii) $A \cup (B \cup C)$ (ix) $(A \cap B) \cap C$
   (x) $A \cap (B \cap C)$
2. {x | x एक धनपूर्णांक है} और {x | x एक पूर्णांक है} के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए।
3. समुच्चयों {x | x एक विषम धनपूर्णांक है} और {x | x एक सम पूर्णांक है} के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए।
4. समुच्चयों के निम्न युग्मों में कौन-कौन असंयुक्त हैं और कौन-कौन नहीं ?
   (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ और $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ और $\{c, d, e, f\}$
   (iii) {x | x एक समपूर्णांक है} और {x | x एक विषम पूर्णांक है}
   (iv) {x | x एक अभाज्य संख्या है} और {x | x सम है और $x > 2$}
5. मान लीजिए A और B कोई दो समुच्चय हैं। क्या हम कह सकते हैं कि समुच्चय $A \cup B$ और $A \cap B$ सदैव असंयुक्त होंगे ? अपने उत्तर की उदाहरणों द्वारा पुष्टि कीजिए।
6. समुच्चयों के निम्न युग्मों में से प्रत्येक में, दोनों समुच्चय में से किसी एक

में से अवयवों की न्यूनतम संख्या बाहर निकालिए ताकि परिणामी युग्म असंयुक्त हो जाए :

(i) {5, 9, 13, 23, 27} और {3, 5, 7, 9, 37, 41}

(ii) {—1, 0, 1, 2, 3} और {3, —3, —2, 0}

(iii) {a, e, i, o, u} और {a, b, c, d, e, f}

7.6 समुच्चय संक्रियाओं के गुण

यद्यपि समुच्चयों पर परिभाषित सम्मिलन और सर्वनिष्ठ की संक्रियाएं संख्याओं पर परिभाषित योग और गुणन की संक्रियाओं के प्रकार की नहीं हैं, तथापि इनमें योग और गुणन के अनेक गुण हैं।

समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ भी क्रमविनिमेय, सहचारी तथा वितरणात्मक होते हैं। उदाहरणार्थ, इससे कुछ अंतर नहीं पड़ता कि हम दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन बनाते हैं या B और A का। इसी प्रकार A और B के सर्वनिष्ठ के लिए भी यही तथ्य सत्य है। क्या आप स्वयं कोई दो समुच्चय चुनकर इनकी जाँच कर सकते हैं?

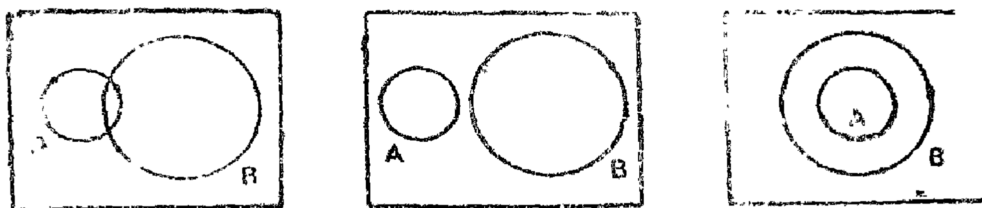
हम विस्तृत रूप से इन गुणों का उच्चतर कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

7.7 वैन आरेख

हम समुच्चय की संकलपना, समुच्चयों के बीच कुछ सम्बन्धों, समुच्चय पर संक्रियाओं और इन संक्रियाओं के गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। यदि हम समुच्चयों को चित्रीय रूप से निरूपित करने के लिए **वैन आरेखों (Venn diagrams)** का प्रयोग करें, तो ये सभी और भी स्पष्ट हो जाते हैं। इन आरेखों में, समष्टीय समुच्चय को, जिसके सभी विचाराधीन समुच्चय उपसमुच्चय होते हैं, एक आयत के अभ्यंतर (interior) द्वारा निरूपित करते हैं, तथा किसी दिए हुए समुच्चय को उस आयत के अन्दर खींचे हुए एक वृत्त के अभ्यंतर से निरूपित करते हैं।

*इन आरेखों का नाम अंग्रेज गणितज्ञ जॉन वैन (1834-1923 ई०) के नाम पर रखा गया है।

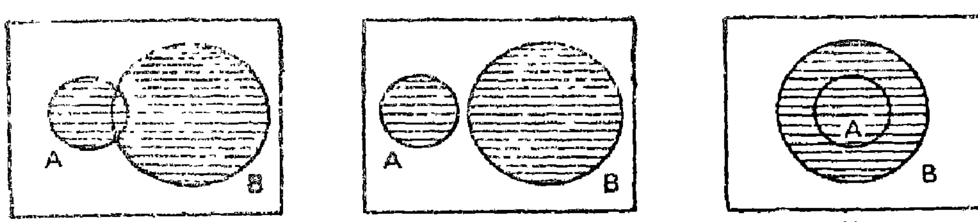
हम वृत्तों के स्थान पर त्रिभुजों, वर्गों और इसी प्रकार की अन्य आकृतियों का भी प्रयोग कर सकते हैं। आकृतियों का, 7.1 (i), (ii) और (iii) में दो समुच्चयों A और B का उन तीन स्थितियों में निरूपण दिया है जब समुच्चय असंयुक्त नहीं हैं, असंयुक्त है और $A \subset B$ है। ध्यान दीजिए कि तीसरी स्थिति में A को निरूपित करने वाले वृत्त को B को निरूपित करने वाले वृत्त के अन्दर खींचा गया है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 7.1

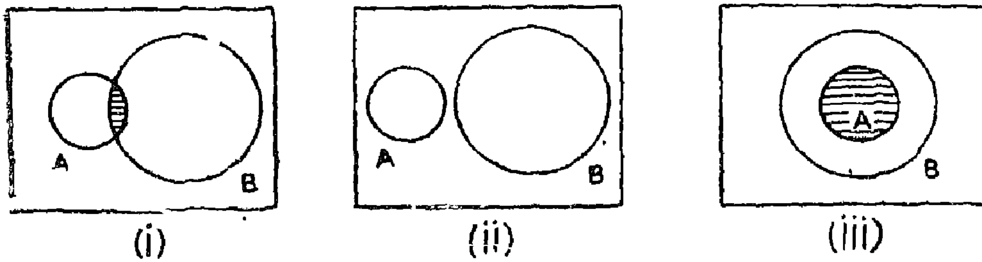
आकृतियों 7.2 (i), (ii) और (iii) में छायांकित (shaded) क्षेत्र उन्हीं तीन स्थितियों में $A \cup B$ दर्शाता है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 7.2 : $A \cup B$ के लिए वैन आरेख

आकृति 7.3 से तीनों स्थितियों में $A \cap B$ का चित्रीय निरूपण प्राप्त होता है।



आकृति 7.3 : $A \cap B$ के लिए वैन आरेख

ध्यान दीजिए कि जब A और B असंयुक्त हैं, आकृति 7.3 (ii) में कोई क्षेत्र छायांकित नहीं है ।

प्रश्नावली 7.6

यदि A और B समुच्चय हैं, तो निम्न के लिए वैन आरेख खींचिए :

1. $A \cap B$ जब $B \subset A$
2. $A \cup B$ जब $B \subset A$
3. वैन आरेखों की सहायता से निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए :
   (i) $A \cup B = B \cup A$
   (ii) $A \cap B = B \cap A$

मुख्य संकल्पनाएँ

समुच्चय	समष्टीय समुच्चय
परिमित और अपरिमित समुच्चय	समुच्चयों का सम्मिलन
रिक्त समुच्चय	समुच्चयों का सर्वनिष्ठ
उपसमुच्चय	असंयुक्त समुच्चय

वैन आरेख

विविध प्रश्नावली II

(एककों V और VII पर)

निम्न समीकरणों के आलेख खींचिए :

1. $3x = -5$ 2. $2y = 3$, 3. $y - x = 0$

4. $x - y + 5 = 0$ 5. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

निम्न असमीकरणों के आलेख खींचिए :

6. $2x \leqslant 1$ 7. $x \geqslant -2$ 8. $y > -3$

9. $3y + 9 \leqslant 0$

निम्न युगपत् समीकरणों को आलेखन द्वारा हल कीजिए :

10. $4x - 3y + 3 = 0$
 $2x + y - 11 = 0$

11. $2x + 3y + 7 = 0$
 $3x - y + 5 = 0$

निम्न युगपत् समीकरणों को हल कीजिए :

12. $4x - y = 0$
 $9x - y = 40$

13. $2x - 3y + 5 = 0$
 $3x + 2y - 6 = 0$

14. $2x - 3y - 1 = 0$
 $3x + 4y - 27 = 0$

*15. $\frac{x}{7} - \frac{y}{6} + \frac{4}{21} = 0$
 $\frac{x}{13} + \frac{y}{5} - \frac{6}{65} = 0$

16. पिता और उसके पुत्र की आयु का योग 48 वर्ष है। 21 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र की आयु की दुगुनी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

17. निम्न में से कौन-कौन समुच्चय हैं ? जो नहीं हैं, उनके कारण स्पष्ट कीजिए।

(i) आपके स्कूल के उन अध्यापकों का संग्रह जिनके नाम अक्षर S से प्रारम्भ होते हैं।

(ii) बुद्धिमान लड़कियों का संग्रह।

(iii) तुलसीदास द्वारा रचित पुस्तकों का संग्रह।

18. निम्न समुच्चयों को सारणीबद्ध रूप में लिखिए :

(i) अंग्रेजी वर्णमाला में स्वरों (vowels) का समुच्चय।

(ii) $A=\{x \mid x$ एक अभाज्य संख्या है और $x<20\}$

(iii) $B=\{x \mid x$ सप्ताह का एक दिन है $\}$

19. निम्न समुच्चयों को समुच्चय-निर्माण रूप में लिखिए।

(i) $\{6, 12, 18, 24, 30\}$

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

20. समुच्चय $\{a, b, c\}$ के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

21. मान लीजिए $A=\{x \mid x$ एक सम धनपूर्णांक है और $x \leqslant 10\}$
तथा $B=\{x \mid x$ एक विषम धनपूर्णांक है और $x \leqslant 10\}$
हैं। $A \cup B$ और $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

22. समुच्चयों के निम्न युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त हैं और कौन से नहीं ?

(i) $\{1, 4, 9\}$ और $\{2, 4, 6, 7\}$

(ii) $\{2\}$ और $\{3\}$

(iii) $\{a, b, c, f\}$ और $\{f, g, h\}$

23. यदि A, B और C समुच्चय हैं, तो निम्न के लिए वेन आरेख खींचिए :

(i) $(B \cap C)$ जब $B \subset C$

(ii) A और C असंयुक्त समुच्चय हैं, A और C, B के उपसमुच्चय हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. 100003 ; **2.** 100 ; **3.** 50 से०मी०, 16 ; **4.** 18, 50, 19 ; **5.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ; **7.** $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{14}{5}$; **8.** $\frac{21[illegible]}{168}$; **9.** $\frac{-3}{5}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{7}{9}$, **10.** $1.\overline{714285}$, $-1.\overline{6}$, $-0.91\overline{6}$; **11.** $\frac{5}{8}$; **13.** $\frac{67}{33}$; **15.** —1715, 937003 ; **16.** 202, 204 ; **17.** विषम ; **18.** सम ; **21.** (i) सत्य, (ii) . असत्य

प्रश्नावली 1.2

2. 1.7320 ; **4.** (i) परिमेय, (ii) अपरिमेय, (iii) अपरिमेय, (iv) अपरिमेय (v) अपरिमेय ; **5.** 3.35663 ; **6.** 2.4393 ; **7.** 0.707 ; **8.** 2.439 ; **9.** $5-2\sqrt{6}$; **10.** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $\sqrt{2}$, 3, (ii) $\sqrt{2}$, 2, (iii) 2, 1, (iv) a^2, —3, (v) a^{-2}, 2, (vi) a, —6, (vii) $\sqrt{2}$, 0, (viii) 1, 1, **2.** (i) $(\sqrt{2})^4$, (ii) $(\sqrt{3})^3$, (iii) $(4)^1$, (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^1$,

(v) $(a^{-8})^3$;   4. (i) 1, (ii) 3, (iii) $\frac{1}{4}$, (iv) $9\sqrt{3}$, (v) $\sqrt{2}$.

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 32, (ii) 4, (iii) $\frac{1}{9}$, (iv) $\frac{1}{125}$, (v) 1024, (vi) $2\sqrt{3}$.
(vii) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, (viii) 8 ;   2. (i) 36, (ii) $\frac{19}{2}$.

प्रश्नावली 2.3

1. (i) $\frac{3a^2}{b^4}$, (ii) $\frac{1}{a^{16}}$, (iii) $\frac{a^{12}}{b^2}$, (iv) $a^{\frac{5}{4}}$;   2. (iv), (vii), (xii);
3. (i) 4, (ii) 4, (iii) 2.

प्रश्नावली 2.4

1. (iv), (vi) ;   2. (i) $(\sqrt{2})^{-12}$, (ii) $(\sqrt{2})^{16}$, (iii) $(\sqrt{3})^{-6}$,
(iv) $(\sqrt{5})^{\frac{15}{2}}$; 3. $\frac{1}{2}$;   4. $\frac{16}{3}$.

प्रश्नावली 2.5

1. $32-\sqrt{2}$;   2. 3 ;   3. $\sqrt{5}$;   4. -11 ;   5. $7\sqrt{7}$;

6. $\frac{9\sqrt{70}}{2}$. 7. $\frac{9}{2}$; 8. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 9. $a^3\sqrt{b}$; 10. a; 11. $\frac{b}{a}$;

12. $\sqrt{ab}$; 13. $(12)^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}$; 14. $3a+9a^2$; 15. $\sqrt{a}+\sqrt{2}$;

16. $a-b$.

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 9, (ii) 25, (iii) 4;

2. $\frac{2}{11}$, $-\frac{8}{9}x$, $\frac{101}{10}x^5$, $\frac{99}{100}x^7$;

3. (i) $-\frac{17}{14}y^3-\frac{39}{28}y^2+\frac{97}{56}y$;

   (ii) $\frac{100}{9}z^5-\frac{790}{99}z^3+z^2+\frac{5}{6}z+6$;

4. $-\frac{2}{7}y^5+y^3-\frac{12}{5}y^2-\frac{83}{7}y$;

5. $\frac{7}{8}y$, $\frac{9}{4}yz$, $-\frac{15}{11}tz$;

6. $-3.6x^4+11.6x^3+11.4x^2+8$;

8. वह उसी या उससे छोटी घात का हो सकता है

9. $-4x^2-2x+1$; 10. $-2x^2+x-3$.

(ii) $8 - \frac{1}{7}y + \frac{1}{\sqrt{7}}y^2 + \sqrt{11}y^4 - y^{11}$;

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)y^{99} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right)y^{98} - 6 - \sqrt{17}$;

5. $2 + \frac{1}{6}x + \frac{7\sqrt{2}}{2}x^2$;

6. $\left(\pi - \sqrt{\frac{6}{5}}\right)x^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{\pi}{3}\right)x - \sqrt{3}$.

प्रश्नावली 3.3

1. (i) x^{11}, (ii) x^9, (iii) x^3, (iv) x^{20}; 2. (i) x^5, (ii) x^6, (iii) x^0, (iv) x^5

प्रश्नावली 3.4

1. $\frac{3}{8}x^8$; 2. $\frac{\sqrt{15}}{42}x^8$; 3. $-\frac{1}{7\sqrt{6}}x^7$; 4. $\frac{9}{11}x^{15}$;

5. $\frac{3}{2}x^{12}$; 6. $\left(\frac{2+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x^8$; 7. $4x^8$; 8. $\sqrt{3}x^2$;

9. $-\frac{64}{77}x^{16}$; 10. $\frac{81}{5\sqrt{5}}x^0$.

प्रश्नावली 3.5

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 4\sqrt{2}x^2$; 2. $-\frac{3}{2}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; 3. $\frac{1}{6}x^8 + \frac{\sqrt{2}}{33}x^5$

4. $-\frac{15}{11}x^4 - \frac{35}{33}x$.

प्रश्नावली 3.6

1. $x^2+(a+1)x+a$; 2. $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3+\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{6}\right)x^2+x$;

3. $x^3+2.5x^2+1.7x-2$; 4. $\left(\frac{11-\sqrt{11}}{11}\right)x^2-\left(\frac{22+3\sqrt{5}}{3}\right)x-\frac{2\sqrt{5}}{3}$;

5. $\frac{23}{16}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{37}{162}$; 6. $\frac{1}{3}z^4+\frac{5}{6}z^3+\frac{29}{54}z^2-\frac{7}{18}z+\frac{1}{9}$;

7. $1+\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z^2-z^3$.

प्रश्नावली 3.7

1. $x+6$; 2. नहीं ; 3. (i) y^2-y+1, (ii) $y+1$;

4. $5x^2-7x+\frac{2}{3}$, $\frac{43}{3}x-\frac{53}{3}$; 5. $2x^2+1$.

प्रश्नावली 3.8

1. (i) परिमेय व्यंजक (ii) बहुपद (iii) परिमेय व्यंजक (iv) बहुपद (v) परिमेय व्यंजक

3. $-10x^3+\frac{24}{7}x^2-7x+\frac{3}{2}$.

प्रश्नावली 3.9

1. (i) $\frac{2x^2+2x}{2x-1}$, (ii) $\frac{-x^4+2x^3+4x^2+4x-1}{x^3+2x^2+x+2}$,

(iii) $\dfrac{2-2\sqrt{6}\,x^2}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}\,x^2}$ **2.** $\dfrac{8y^3+2y+2}{1-y-4y^2}$; **3.** (i) $\dfrac{2x^3-2x^2+x}{x-1}$;

(ii) $\dfrac{y^2-2y+2}{1-y}$.

प्रश्नावली 3.10

1. $-\dfrac{4x^3+4x^2+9x+2}{4x^3+4x^2+3x+1}$; **2.** $\dfrac{3+13x+10x^2-3x^3}{2+3x}$;

3. $\dfrac{128x^3+352x^2+102x-2}{16x^2+42x+5}$.

प्रश्नावली 3.11

1. (i) $\dfrac{10x^2+x-3}{5x^2+4x-1}$, (ii) $\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+3}$, (iii) $\dfrac{5y^2+15y}{72y^2+14y-1}$,

(iv) $\dfrac{8x+7x^2+6}{x+1}$; **2.** $\dfrac{29+39x-20x^2-15x^3}{x^2+3x-4}$;

3. $\dfrac{60+35y+55y^2-7y^3}{5+6y}$.

प्रश्नावली 3.12

1. (i) $\dfrac{3x+0.1}{0.5x+0.7}$, (ii) $\dfrac{7x^2-2x+0.3}{8x^2+7x+0.1}$, (iii) $\dfrac{3y+0.8}{20y-8y^2+5}$;

2. $\dfrac{x^4+40x^3+421x^2+402x+101}{x^3+21x^2+30x+10}$; **4.** (i) $\dfrac{1}{2x+3}$, (ii) $x+1$.

प्रश्नावली 3.13

1. $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x+1}$; 2. $\dfrac{3y^2+2y-5}{5+3y-2y^2}$;

3. (i) $\dfrac{4x^4+6x^3-2x^2+4x}{x^4-2x^2+1}$, (ii) $3y^4+2y^3+5y^2-\dfrac{9}{4}y$;

4. (i) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$, (ii) $\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x}$, (iii) $\dfrac{1}{x+1}$, (iv) $\dfrac{x^2}{x+1}$.

प्रश्नावली 4.1

1. x^2+2x+1 ; 2. $4x^2+12x+9$; 3. y^2-2y+1 ; 4. x^2 ;
5. 9801 ; 6. $4x^2+12xz+9z^2$; 7. $4x^2+4x+1$; 8. $9x^2-6x+1$;
9. $4z^2-20z+25$; 10. $x^2+2\sqrt{2}\,x+2$; 11. $x^2+\sqrt{10}x+\frac{5}{2}$;
12. $x^2+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}x+9$; 13. $\sqrt{2}\,d^3+4\sqrt{2}\,d^2$; 14. $2-\dfrac{1}{2}x^2$.

प्रश्नावली 4.2

1. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; 2. $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$;
3. $x^3+6x^2+12x+8$; 4. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$;
5. $216x^3+756x^2y+882xy^2+343y^3$; 6. $x^3+\sqrt{3}\,x^2+x+\frac{1}{3}$;
7. $27x^3+27x^2+9x+1$; 8. 1061208 ; 9. 8615125 ; 10. 1003003001 ;
11. 1157.625.

प्रश्नावली 4.3

1. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; 2. $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$;
3. $512x^3-192x^2+24x-1$;
4. $1-\frac{21}{10}x+\frac{147}{100}x^2-\frac{343}{1000}x^3$; 5. $8x^3-36x^2z+54xz^2-27z^3$;
6. 912673 ; 7. 997002999 ; 8. 970.299.

प्रश्नावली 4.4

1. a^3+8 ; 2. a^3+1 ; 3. $0.343x^3+0.729y^3$; 4. $8x^3+343$;
5. $\frac{x^3}{8}+\frac{27}{64}y^3$.

प्रश्नावली 4.5

1. $1-x^3$; 2. $125x^3-27y^3$; 3. $8a^3-1$; 4. $1-8a^3$
5. $27x^3-\frac{1}{343}y^3$.

प्रश्नावली 4.6

1. $\sqrt{2}\,x(1+\sqrt{2}\,x)$; 2. $7y(1+3y-7y^2)$; 3. $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;
4. $(\sqrt{7}\,y-\sqrt{3}\,z)(\sqrt{7}\,y+\sqrt{3}\,z)$; 5. $(y+2)^2$; 6. $(0.1x+y)^2$;
7. $(x-\sqrt{3})^2$; 8. $(\sqrt{2}\,x-y)^2$.

प्रश्नावली 4.7

1. $(x+1)^2$; 2. $(x-5)^2$; 3. $(x+1)(x+5)$; 4. $(y-3)(y+1)$;
5. $(z-3)(z-2)$; 6. $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$; 7. $(x+5)(x-4)$;
8. $(x+a)(x+2a)$; 9. $(x+3k)(x-k)$; 10. $(x-3p)(x+2p)$.

प्रश्नावली 4.8

1. $(a-1)(a^2+a+1)$; 2. $a(a+1)(a^2-a+1)$;
3. $(2x+7y)(4x^2-14xy+49y^2)$; 4. $\left(\frac{1}{6}a+2b\right)\left(\frac{1}{36}a^2-\frac{1}{3}ab+4b^2\right)$;
5. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\sqrt{2}\,y\right)\left(\frac{1}{5}x^2+\sqrt{\frac{2}{5}}xy+2y^2\right)$;
6. $(0.1x-0.5y)(0.01x^2+0.05xy+0.25y^2)$.

विविध प्रश्नावली I

4. 2.8284 ; 7. परिमेय संख्या ; 9. (i) 55.9, (ii) 5, (iii) 0.037, (iv) 127;
10. (i) $\frac{a^2b^2}{5^6}$, (ii) $\frac{2^5a^{25}}{b^5}$; 11. (ii), (iv) ; 12. (i) 5, (ii) -2, (iii) 1,
(iv) $\frac{4+\sqrt{3}}{12}$; 13. (i) $(\sqrt{6})^{-2}$, (ii) $5^{\frac{7}{6}}$; 14. -4 , 15. $-\frac{9}{2}$
16. (i) 7, (ii) $2-\sqrt{3}$; 17. (i) $a^{\frac{7}{6}}b$, (ii) $2a^{\frac{7}{3}}b^2$;
18. $4\sqrt{3}x^2+14x+5\sqrt{3}$; 19. $x^2+4x-5\sqrt{3}$; 20. $10x^2+\frac{13\sqrt{3}}{3}x-1$
21. $1+4\sqrt{2}x-2x^2-\sqrt{2}x^3$; 22. $\sqrt{14}x+(\sqrt{7}-\sqrt{14})x^2-\sqrt{7}x^3$;
23. भागफल x^2+x है, शेषफल $-2x-5$ है

24. भागफल $3x^3-5x^2+2x+4$ है, शेषफल $-6x-6$ है ;

25. $\frac{2a}{a^2-b^2}$; 26. $\frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$; 27. $\frac{(a+b+c)x}{abc}$;

28. $\frac{14x}{49x^2-5}$; 29. $\frac{1+15x+6x^2-x^3}{3x^3-9x}$; 30 (i) $3\sqrt{x}$, (ii) $\frac{4}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$;

31. $(x-4)$ मीटर 32. $\frac{x^2-2x-2}{x^3+x^2-2x}$; 33. $27x^3+125y^3$;

34. $2\sqrt{2}\,x^3-y^3$; 35. $(1+2a)(1-2a+4a^2)$;

36. $(5p-1)(25p^2+5p+1)$; 37. $(4k+6t)(16k^2-24kt+36t^2)$;

38. $(3r+d)(9r^2-3rd+d^2)$; 39. $3t^2-3t+1$; 40. 2.

प्रश्नावली 5.1

1. A(2,2), B(5,—2), C(3,—4), D(—3,—3), E(—5,—4), F(—4,3), G(—2,4) ; 2. नहीं 3. नहीं

प्रश्नावली 5.2

2. —2, 3 ; 3. $-\frac{3}{2}$, $-\frac{11}{2}$

प्रश्नावली 5.4

1. $x=3, y=3$; 2. $x=4, y=-6$; 3. कोई हल नहीं
4. $x=6, y=0$; 5. $x=4, y=-1$; 6. $x=2, y=-4$;
7. कोई हल नहीं 8. $x=4, y=1$.

प्रश्नावली 5.5

1. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$; 2. $x = 2$, $y = -3$; 3. $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$;
4. $x = 16$, $y = 1$; 5. $x = 4$, $y = -1$; 6. $x = -2$, $y = -5$;
7. $x = \frac{22}{7}$, $y = -\frac{1}{7}$.

प्रश्नावली 5.6

1. $x = 45$, $y = 15$; 2. $x = -\frac{5}{3}$, $y = \frac{17}{2}$;
3. $x = \frac{9}{10}$, $y = \frac{8}{5}$; 4. $x = 1$, $y = 1$; 5. $x = 1$, $y = 2$;
6. $x = 2$, $y = 6$; 7. $x = \frac{81}{19}$, $y = \frac{22}{19}$.

प्रश्नावली 6.1

1. 361 ; 2. 529 ; 3. 1331 ; 4. 4913 ; 5. 13824 ;
6. 2.645 ; 7. 4.242 ; 8. 4.582 ; 9. 2.289 ; 10. 2.466.

प्रश्नावली 6.2

1. 2 रु॰; 2. 4 रु॰ 5 पैसे ; 3. 20 रु॰ ;
4. 22 रु॰ 50 पैसे ; 5. 3 रु॰ 21 पैसे ;
6. 3 रु॰.

प्रश्नावली 7.1

1. 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10

प्रश्नावली 7.2

1. (a) 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, (b) (i) $\notin$, (ii) $\notin$, (iii) $\notin$,
(iv) $\in$, (v) $\notin$, (vi) $\in$, (vii) $\notin$, (viii) $\in$, (ix) $\in$;
2. (i) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, (ii) $\{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$,
(iii) $\{0, 1\}$, (iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, (v) {I, N, D, A};
3. (i) {x | x अंग्रेजी वर्णमाला में एक स्वर है},
(ii) {x | x एक पूर्णांक है और $-3 \leqslant x \leqslant 2$},
(iii) {x | x, 4 का एक गुणज है और $4 \leqslant x \leqslant 24$},
(iv) {x | $x = n^2$, n एक धनपूर्णांक है}.

प्रश्नावली 7.3

1. (i) परिमित (ii) अपरिमित, (iii) अपरिमित, (iv) अपरिमित, (v) परिमित
(vi) परिमित ; 2. (ii).

प्रश्नावली 7.4

1. (i) A, (ii) हाँ ; 2. ϕ, $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$;
3. ϕ, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {1, 2}, {0, 2}, {0, 1, 2};
4. ϕ, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}
{a, b, d}, {b, c, d}, {c, d, a}, {a, b, c, d} ; 5. 4, 8, 16 6. (i) असत्य
(ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य ; 7. हाँ ; 8. (i) $\not\subset$
(ii) $\subset$, (iii) $\subset$, (iv) $\not\subset$.

प्रश्नावली 7.5

1. (i) {—1, 0, 2, 3, 4, 5, —3} (ii) {2, 3, 4, 5, —3, 6, 8},
(iii) {—1, 0, 2, 3, 4, 6, 8}, (iv) {3}, (v) {4}, (vi) {2},
(vii) {—1, 0, 2, 3, 4, 5, —3, 6, 8}, (viii) {—1, 0, 2, 3, 4, 5, —3, 6, 8},
(ix) ϕ, (x) ϕ ; 2. {x | x एक पूर्णांक है}, {x | x एक धनपूर्णांक है}
3. {x | x एक धनपूर्णांक है}, ϕ ; 4. (i) असंयुक्त नहीं (ii) असंयुक्त नहीं
(iii) असंयुक्त, (iv) असंयुक्त ; 5. नहीं

विविध प्रश्नावली II

10. $x=3, y=5$; 11. $x=-2, y=-1$; 12. $x=8, y=32$;
13. $x=\frac{8}{13}$, $y=\frac{27}{13}$; 14. $x=5, y=3$;
15. $x=-\frac{62}{113}$, $y=\frac{76}{113}$; 16. 39, 9 ; 17. (i), (iii);
18. (i) {a, e, i, o, u}, (ii) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19},
(iii) {रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार}
19. (i) {x | x, 6 का एक गुणज है और $6 \leqslant x \leqslant 30$}, (ii) {x | x एक सम धनपूर्णांक है और $2 \leqslant x \leqslant 10$} ;
20. ϕ, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} ;
21. {x | x एक धनपूर्णांक है और $x \leqslant 10$}, ϕ ; 22. (i) असंयुक्त नहीं,
(ii) असंयुक्त (iii) असंयुक्त नहीं ।

पारिभाषिक शब्दावली

अंक	digit/marks
अंकगणित	arithmetic
अंकित मान	face value
अंतर	difference
अंतराल	interval
अंतर्विष्ट	contained
अंश	numerator
अक्षर संख्याएँ	literal numbers
अज्ञात	unknown
अधिसमुच्चय	superset
अनुपात	ratio
अनुप्रयोग	application
अपरिमित	infinite
अपरिमेय संख्या	irrational number
अभ्यंतर	interior
अभाज्य संख्या	prime number
अवयव	element
अवरोही क्रम	decreasing order
असंयुक्त समुच्चय	disjoint sets
असमान	unequal
असमिका	inequality
असमीकरण	inequation
असांत आवर्ती	non-terminating repeating या non-terminating recurring

आँकड़े	data
आकृति	figure
आधार	base
आधारभूत/मूलभूत	fundamental
आयत	rectangle
आरोही क्रम	increasing order
आलेख	graph
आलेखित	plot
इकाई/एकक/मात्रक	unit
उपसमुच्चय	subset
उभयनिष्ठ	common
ऊँचाई	height
ऊर्ध्वाधर	vertical
ऋणात्मक	negative
एकपदी	monomial
एकल समुच्चय	singleton set
कथन	statement
कर्ण	hypotenuse
करणी	radical
करणीगत राशि	radicand
केन्द्र	centre
कोटि	ordinate
कोण	angle
क्रमविनिमेय	commutative
क्रमसंबन्ध	relations of order
क्रमितयुग्म	ordered pair
क्षेत्र	region
क्षेत्रफल	area
क्षैतिज	horizontal
खाता	account

पारिभाषिक शब्दावली

गणित	mathematics
गुणज	multiple
गुणन	multiplication
गुणनखंड	factor
गुणनखंडन	factorization/factoring
गुणनफल	product
गुणांक	coefficient
घन	cube
घनमूल	cube root
घात	power/degree
घातांक	exponent/index
घातांकीय	exponential
घातांकीय संकेतन	exponential notation
चतुर्थांश	quadrant
चर	variable
चाप	arc
चिह्न	sign
चौड़ाई	breadth/width
छायांकित	shaded
तदनुरूपी	corresponding
तल	plane
तालिका रूप	roster form
त्रिज्या	radius
त्रिपद	trinomial
त्रिभुज	triangle
दक्षिण पक्ष	right hand side
दशमलव	decimal
दशमलव निरूपण	decimal representation
दिशा	direction
द्विपद	binomial

द्विघात व्यंजक	quadratic expression
धन	plus/money
धनपूर्णांक	natural number
धनात्मक	positive
निम्नतम पदों में	in lowest terms
नियम	rule/law
निरूपण	represent. tion
निर्देशांक	coordinat:
न्यूनकोण	acute angle
चरण	step
पद	term
पद्धति/निकाय	system
परवर्ती	successor
परिधि	circumference
परिमाण	magnitude
परिमाप	perimeter
परिमित	finite
परिमेयकरण	rationalization
परिमेय व्यंजक	rational expression
परिमेय संख्या	rational number
प्रमेय	theorem
पूर्ण वर्ग त्रिपद	perfect square trinomial
पूर्ण संख्या	whole number
पूर्णांक	integer
पूर्ववर्ती	predecessor
प्रतिच्छेद/काटना	intersect
प्रतिबन्धित सर्वसमिका	conditional identity
प्रतिरूपी	typical
प्रतिलोम	inverse
प्रतिशत	percent

प्रतिस्थापन	substitution
प्रविष्टि	entry
प्रसार	expand
पृथक	separate
बराबर/समान	equal
बहुपद	polynomial
बिंदु	point
बीच	between
बीजीय व्यंजक	algebraic expression
ब्याज	interest
भाग	divide/divided by
भागफल	quotient
भाजक	divisor
भाज्य	dividend
भिन्न	distinct
भुज	abscissa
भुजा	side
मध्य-बिंदु	mid-point
मापन	measure/measurement
मूल	root/original
मूलबिंदु	origin
युगपत्	simultaneous
योग	addition/sum
योज्य प्रतिलोम	additive inverse
रिक्त	blank/empty
रिक्त समुच्चय	empty set/null set
रेखा	line
रेखाखंड	line-segment
रैखिक	linear
लम्ब	perpendicular

लम्बाई	length
लाभ	profit
लुप्तीकरण	elimination
वर्ग	square
वर्गमूल	square root
वाम पक्ष	left hand side
वार्षिक	annual/yearly
वास्तविक सख्या	real number
विकर्ण	diagonal
वितरणात्मक	distributive
विभाजन	division
विभाज्य	divisible
विरोधी समीकरण	inconsistent equations
विषम	odd
वैन आरेख	venn diagram
वृत्त	circle
व्यंजक	expression
	subtraction
	diameter
	reciprocal
	zero
	non-zero
	remainder
	concept
	operation
	symbol/hint
	notation
	number
	numeral
	numerical

संख्या रेखा	number line
संतुष्ट	satisfy
संयोग	combination
सदस्य	member
सम	even
समबाहु त्रिभुज	equilateral triangle
सममिति	symmetry
समष्टीय समुच्चय	universal set
समांतर	parallel
समान पद	like terms
समान समुच्चय	equal sets
समिका	equality
सम्मिलन	union
समीकरण	equation
समुच्चय	set
समुच्चय-निर्माण रूप	set-builder form
सम्मुख	opposite
सर्वनिष्ठ/प्रतिच्छेदन	intersection
सर्वसमिका	identity
सहचारी	associative
सांत	terminating
सारणी	table
सारणीबद्ध रूप	tabular form
साहचर्य गुण	associative property
सुपरिभाषित	well defined
सूत्र	formula
स्तम्भ	column
स्थानीय मान	place value
स्वैच्छिक	arbitrary
हर	denominator
हल	solution